

文章编号: 2095-2163(2020)08-0004-06

中图分类号: TN713

文献标志码: A

# 非线性系统双未知输入自校准滤波方法

傅惠民, 崔轶

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100191)

**摘要:** 在导航与控制、在线监测、故障诊断等工程领域,常常遇到强非线性系统(不能线性化),同时由于模型及参数选取不当、环境因素等影响,系统状态方程和量测方程中往往均含有未知输入(未知系统误差),而传统的 Kalman 滤波方法无法消除这两种未知输入的影响,导致较大的滤波误差。为此,本文提出一种非线性系统双未知输入自校准滤波方法,分别给出双未知输入自校准秩滤波方法和双未知输入自校准无迹滤波方法。该方法能分别对非线性状态方程和量测方程中是否含有未知输入进行自动识别,在确认存在未知输入后再对该未知输入进行估计和补偿,从而消除未知输入的影响。此外,还建立两步自校准滤波方法和两步量测数据自校准融合方法,可以综合利用前一步信息和当前时刻信息估计未知输入,能够进一步提高计算的鲁棒性和精度。

**关键词:** 未知输入; 自校准; 导航与控制; 在线监测; 故障诊断

## Nonlinear system dual-unknown-input self-calibration filtering methods

FU Huimin, CUI Yi

(Research Center of Small Sample Technology, Beihang University, Beijing 100191, China)

**[Abstract]** Strong nonlinear systems (which cannot be linearized) are often encountered in navigation and control, online monitoring, fault diagnosis and other engineering fields. In such systems, often both state and measurement equations contain unknown inputs (unknown system errors) due to improper selection of models and parameters, environmental factors and other reasons. Traditional Kalman filtering methods cannot eliminate the influence of these unknown inputs, resulting in large filtering errors. To solve this problem, nonlinear system dual-unknown-input self-calibration filtering methods are proposed in this paper, including the dual-unknown-input self-calibration rank filtering method and the dual-unknown-input self-calibration unscented filtering method. These methods can automatically recognize the unknown inputs in nonlinear state and measurement equations separately, and estimate and compensate these unknown inputs after confirming the existence of them, thus eliminating their influence. Moreover, a two-stage self-calibration filtering method and a two-stage measurement data self-calibration fusion method are also proposed, which can comprehensively utilize the information of previous step and current time to estimate the unknown inputs, thus further improving the robustness and accuracy of calculation.

**[Key words]** unknown input; self-calibration; navigation and control; online monitoring; fault diagnosis

## 0 引言

Kalman 滤波(Kalman Filter)能够将状态方程和量测方程进行有机融合,从而减小滤波的偶然误差<sup>[1]</sup>,但是它无法消除系统误差的影响。由于环境因素、测量设备不稳定性等原因,状态方程或量测方程中往往含有未知输入(未知系统误差),这些未知输入在滤波过程中会严重降低滤波精度。为此,人们先后提出了自适应 Kalman 滤波(Adaptive Kalman Filter)和鲁棒两步 Kalman 滤波(Robust Two-Stage Kalman Filter)等方法,但都未能很好解决未知输入(未知系统误差)问题。

傅惠民等通过建立相邻两次滤波之间未知输入的纵向联系和未知输入与状态变量的横向联系,先后提出了自识别自校准滤波方法、含缓变未知输入的数据自校准滤波方法等,解决了线性或可线性化的状态方程或量测方程中含有未知输入的问题<sup>[2-3]</sup>;并提出了非线性自识别自校准 Kalman 滤波方法,解决了非线性系统状态方程中含有未知输入的问题<sup>[4]</sup>。本文针对非线性系统状态方程和量测方程中均含有未知输入(未知系统误差)的情况,建立一种非线性系统双未知输入自校准滤波方法,包括双未知输入自校准秩滤波方法、双未知输入自校

**基金项目:** 国家重点基础研究发展计划(2012CB720000);工信部 2018 年智能制造综合标准化项目《基于数字仿真的机械产品可靠性测试方法标准研究与试验验证》。

**作者简介:** 傅惠民(1956-),男,博士,教授,博士生导师,“长江学者”奖励计划特聘教授,主要研究方向:小样本可靠性技术、自校准滤波方法、在线监测、结构健康诊断、寿命预测与控制研究;崔轶(1993-),男,博士研究生,主要研究方向:自校准滤波方法。

**通讯作者:** 傅惠民 Email: fhm@buaa.edu.cn

**收稿日期:** 2020-06-02

准无迹滤波方法和两步自校准滤波方法,该方法能够有效地消除非线性状态方程和量测方程中的未知输入影响,提高滤波的鲁棒性和精度。

## 1 双未知输入自校准秩滤波方法

### 1.1 双未知输入非线性系统方程

工程应用中,状态方程和量测方程均含有未知输入的非线性离散系统一般可表示为式(1)和式(2):

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}) + \mathbf{b}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1}, \quad (1)$$

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{X}_k) + \mathbf{d}_k + \mathbf{V}_k. \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{X}_k$  为  $m$  维状态向量,  $\mathbf{Y}_k$  为  $n$  维量测向量;  $\mathbf{f}_{k-1}(\cdot)$  和  $\mathbf{h}_k(\cdot)$  为非线性向量函数;  $\mathbf{b}_{k-1}$  和  $\mathbf{d}_k$  分别为状态方程和量测方程中的未知输入;  $\mathbf{W}_{k-1}$  和  $\mathbf{V}_k$  分别是状态噪声向量和量测噪声向量,并且满足式(3):

$$\begin{cases} E(\mathbf{W}_k) = \mathbf{0}, & E(\mathbf{W}_k \mathbf{W}_j^T) = \mathbf{Q}_k \delta_{k,j}; \\ E(\mathbf{V}_k) = \mathbf{0}, & E(\mathbf{V}_k \mathbf{V}_j^T) = \mathbf{R}_k \delta_{k,j}; \\ E(\mathbf{W}_k \mathbf{V}_j^T) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $E(\cdot)$  为数学期望符号;  $\delta_{k,j}$  为  $\delta$  函数,当  $k=j$  时,  $\delta_{k,j} = 1$ , 当  $k \neq j$  时,  $\delta_{k,j} = 0$ 。

针对式(1)和式(2)所示的含双未知输入的非线性系统,首先秩采样,然后对双未知输入自识别自校准,接着一步自校准预测,最后量测自校准更新。

### 1.2 秩采样

对  $k \geq 1$ , 采用秩采样方法得到秩采样点集  $\{\mathbf{x}_{k-1,i}\}^{[5]}$  为式(4):

$$\mathbf{x}_{k-1,i} = \begin{cases} \hat{\mathbf{X}}_{k-1} + u_{p_1} (\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}})_i, & (i = 1, 2, \dots, m); \\ \hat{\mathbf{X}}_{k-1} - u_{p_1} (\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}})_{i-m}, & (i = m+1, \dots, 2m); \\ \hat{\mathbf{X}}_{k-1} + u_{p_2} (\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}})_{i-2m}, & (i = 2m+1, \dots, 3m); \\ \hat{\mathbf{X}}_{k-1} - u_{p_2} (\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}})_{i-3m}, & (i = 3m+1, \dots, 4m). \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$  和  $\mathbf{P}_{k-1}$  分别为第  $k-1$  步的状态估计和估计误差协方差矩阵;  $(\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}})_i$  为  $\mathbf{P}_{k-1}$  的平方根的第  $i$  列向量;  $u_{p_1}$  和  $u_{p_2}$  为标准正态偏量,  $u_{p_1} = 0.482\ 25$ ,  $u_{p_2} = 1.128\ 14$ 。

### 1.3 双未知输入自识别自校准

分别对状态方程中的未知输入  $\mathbf{b}_{k-1}$  和量测方程中的未知输入  $\mathbf{d}_k$  进行自识别自校准。

#### 1.3.1 状态方程未知输入自识别自校准

工程实际中,当相邻两次滤波的时间间隔足够小时,  $\mathbf{b}_{k-1}$  往往不会发生较大的变化。因此,当  $k \geq 3$  时,状态方程中的  $\mathbf{b}_{k-1}$  可近似表示为:

$$\mathbf{b}_{k-1} \approx \mathbf{b}_{k-2}. \quad (5)$$

首先,由式(1)和式(5)可得  $\mathbf{b}_{k-1}$  的初步估计

$\hat{\mathbf{b}}_{k-1}^{(0)}$  为式(6):

$$\hat{\mathbf{b}}_{k-1}^{(0)} = \hat{\mathbf{X}}_{k-1} - \frac{1}{4m} \sum_{i=1}^{4m} \mathbf{f}_{k-2}(\mathbf{x}_{k-2,i}), \quad (6)$$

其中:  $\mathbf{x}_{k-2,i}$  为秩采样点,由式(4)计算得到。

考虑到状态噪声的影响,  $\mathbf{b}_{k-1}$  的估计  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1}$  由式(7)给出:

$$\hat{\mathbf{b}}_{k-1,j} = \begin{cases} 0, & \text{当 } |\hat{\mathbf{b}}_{k-1,j}^{(0)}| < c_b \sigma_{k-1,j} \text{ 时,} \\ \hat{\mathbf{b}}_{k-1,j}^{(0)}, & \text{当 } |\hat{\mathbf{b}}_{k-1,j}^{(0)}| \geq c_b \sigma_{k-1,j} \text{ 时,} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

其中:  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1,j}$  和  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1,j}^{(0)}$  分别为  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1}$  和  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1}^{(0)}$  的第  $j$  个分量;  $\sigma_{k-1,j} = \sqrt{\mathbf{Q}_{k-1}(j,j)}$ ,  $\mathbf{Q}_{k-1}(j,j)$  为协方差矩阵  $\mathbf{Q}_{k-1}$  第  $j$  行第  $j$  列的元素;  $c_b$  为根据工程需要确定的状态噪声影响阈值调节参数,可取 0, 1, 2, 3, ... 等数值。通常情况下,  $c_b$  取 3 (即  $3\sigma$  准则); 当未知输入与噪声大小相当时,可以酌情取 0 到 3 之间的某一数值; 当确知有未知输入存在时,则取 0。此外,令  $\hat{\mathbf{b}}_0 = \hat{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{0}$ 。

需要说明的是,当确知某些状态方程中没有未知输入时,可直接令这些状态方程中相对应的未知输入分量  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1,j}$  等于 0, 而不再通过式(7)判别和估计。

#### 1.3.2 量测方程未知输入自识别自校准

同样,工程实际中,当相邻两次滤波的时间间隔足够小时,  $\mathbf{d}_k$  往往不会发生较大的变化。因此,当  $k \geq 2$  时,量测方程中的  $\mathbf{d}_k$  可近似表示为式(8):

$$\mathbf{d}_k \approx \mathbf{d}_{k-1}. \quad (8)$$

由式(2)和式(8)可得  $\mathbf{d}_k$  的初步估计  $\hat{\mathbf{d}}_k^{(0)}$  为式(9):

$$\hat{\mathbf{d}}_k^{(0)} = \mathbf{Y}_{k-1} - \frac{1}{4m} \sum_{i=1}^{4m} \mathbf{h}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1,i}), \quad (9)$$

其中:  $\mathbf{x}_{k-1,i}$  为秩采样点,由式(4)计算得到。

考虑到量测噪声的影响,  $\mathbf{d}_k$  的估计  $\hat{\mathbf{d}}_k$  由式(10)给出:

$$\hat{\mathbf{d}}_{k,j} = \begin{cases} 0, & \text{当 } |\hat{\mathbf{d}}_{k,j}^{(0)}| < c_d \sigma_{k,j}^* \text{ 时,} \\ \hat{\mathbf{d}}_{k,j}^{(0)}, & \text{当 } |\hat{\mathbf{d}}_{k,j}^{(0)}| \geq c_d \sigma_{k,j}^* \text{ 时,} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

其中,  $\hat{\mathbf{d}}_{k,j}$  和  $\hat{\mathbf{d}}_{k,j}^{(0)}$  分别为  $\hat{\mathbf{d}}_k$  和  $\hat{\mathbf{d}}_k^{(0)}$  的第  $j$  个分量;  $\sigma_{k,j}^* = \sqrt{\mathbf{R}_k(j,j)}$ ,  $\mathbf{R}_k(j,j)$  为协方差矩阵  $\mathbf{R}_k$  第  $j$

行第  $j$  列的元素;  $c_d$  为根据工程需要确定的量测噪声影响阈值调节参数,其取值原则与上文中的  $c_b$  相同。此外,令  $\hat{\mathbf{d}}_1 = \mathbf{0}$ 。

需要说明的是,为了有效地校准,量测方程组中精确的量测方程通常不应少于  $m^*$  个,  $m^* (m^* \leq m)$  为  $\mathbf{X}_k$  中的独立变量数,即由这些方程可求得  $\mathbf{X}_k$  的无偏估计。这些精确的量测方程中的未知输入分量  $\hat{\mathbf{d}}_{k,j}$  应直接令其等于 0,而不再通过式(10)判别和估计。

#### 1.4 一步自校准预测

一步自校准预测  $\hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)}$  为式(11):

$$\hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} = \frac{1}{4m} \sum_{i=1}^{4m} \mathbf{X}_{k/(k-1),i}, \quad (11)$$

其中:

$$\mathbf{X}_{k/(k-1),i} = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1,i}) + \hat{\mathbf{b}}_{k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, 4m. \quad (12)$$

一步预测误差协方差矩阵  $\mathbf{P}_{k/(k-1)}$  由式(13)计算:

$$\mathbf{P}_{k/(k-1)} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{4m} [(\mathbf{X}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)}) (\mathbf{X}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)})^T] + \mathbf{Q}_{k-1}, \quad (13)$$

其中,  $\omega$  为协方差权重系数,  $\omega = 2(u_{p1}^2 + u_{p2}^2) = 3.0105$ 。

滤波初始化由式(14)和式(15)给出:

$$\hat{\mathbf{X}}_0 = E(\mathbf{X}_0), \quad (14)$$

$$\mathbf{P}_0 = E[(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0)(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0)^T]. \quad (15)$$

#### 1.5 量测自校准更新

重新秩采样,得到秩采样点集  $\{\mathbf{X}_{k/(k-1),i}\}$  为式(16):

$$\mathbf{X}_{k/(k-1),i} = \begin{cases} \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} + u_{p1} (\sqrt{\mathbf{P}_{k/(k-1)}})_i, & (i = 1, 2, \dots, m); \\ \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} - u_{p1} (\sqrt{\mathbf{P}_{k/(k-1)}})_{i-m}, & (i = m+1, \dots, 2m); \\ \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} + u_{p2} (\sqrt{\mathbf{P}_{k/(k-1)}})_{i-2m}, & (i = 2m+1, \dots, 3m); \\ \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} - u_{p2} (\sqrt{\mathbf{P}_{k/(k-1)}})_{i-3m}, & (i = 3m+1, \dots, 4m). \end{cases} \quad (16)$$

由式(17)进行状态估计:

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} + K_k (\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k). \quad (17)$$

式中:

$$\hat{\mathbf{Y}}_k = \frac{1}{4m} \sum_{i=1}^{4m} \mathbf{Y}_{k,i}, \quad (18)$$

$$\mathbf{Y}_{k,i} = \mathbf{h}_k(\mathbf{X}_{k/(k-1),i}) + \hat{\mathbf{d}}_k, \quad i = 1, 2, \dots, 4m. \quad (19)$$

滤波增益矩阵  $\mathbf{K}_k$  由式(20)给出:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{XZ,k} \mathbf{P}_{Z,k}^{-1}. \quad (20)$$

式中:

$$\mathbf{P}_{XZ,k} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{4m} [(\mathbf{X}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)}) (\mathbf{Y}_{k,i} - \hat{\mathbf{Y}}_k)^T], \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_{Z,k} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{4m} [(\mathbf{Y}_{k,i} - \hat{\mathbf{Y}}_k) (\mathbf{Y}_{k,i} - \hat{\mathbf{Y}}_k)^T] + \mathbf{R}_k. \quad (22)$$

状态估计误差协方差矩阵  $\mathbf{P}_k$  由式(23)计算:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k/(k-1)} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{Z,k} \mathbf{K}_k^T. \quad (23)$$

## 2 双未知输入自校准无迹滤波方法

针对式(1)和式(2)所示的含双未知输入的非线性系统,首先 Sigma 点采样,然后对双未知输入自识别自校准,接着一步自校准预测,最后量测自校准更新。

### 2.1 Sigma 点采样

对  $k \geq 1$ , 采用 Sigma 点采样方法得到 Sigma 点集  $\{\mathbf{X}_{k-1,i}\}$  [6] 为式(24):

$$\mathbf{X}_{k-1,i} = \begin{cases} \hat{\mathbf{X}}_{k-1} + (\sqrt{(m+\lambda)\mathbf{P}_{k-1}})_i, & (i = 1, 2, \dots, m); \\ \hat{\mathbf{X}}_{k-1}, & (i = m+1); \\ \hat{\mathbf{X}}_{k-1} + (\sqrt{(m+\lambda)\mathbf{P}_{k-1}})_{i-m-1}, & (i = m+2, \dots, 2m+1). \end{cases} \quad (24)$$

式中:  $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$  和  $\mathbf{P}_{k-1}$  分别为第  $k-1$  步的状态估计和估计误差协方差矩阵;  $(\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}})_i$  为  $\mathbf{P}_{k-1}$  的平方根的第  $i$  列向量;  $\lambda$  为比例参数,  $\lambda = \alpha^2(m + \kappa) - m$ , 其中  $\kappa$  为调节参数,一般取 0 或  $3-m$ ,  $\alpha$  亦为调节参数。

### 2.2 双未知输入自识别自校准

由式(1)和式(5)可得  $\mathbf{b}_{k-1}$  的初步估计  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1}^{(0)}$  为式(25):

$$\hat{\mathbf{b}}_{k-1}^{(0)} = \hat{\mathbf{X}}_{k-1} - \sum_{i=1}^{2m+1} w_M^i \mathbf{f}_{k-2}(\mathbf{X}_{k-2,i}), \quad (25)$$

其中:  $\mathbf{X}_{k-2,i}$  为 Sigma 点,由式(24)计算得到。 $w_M^i$  为均值权重系数,由式(26)给出:

$$w_M^i = \begin{cases} \frac{1}{2(m+\lambda)}, & (i = 1, 2, \dots, m, m+2, \dots, 2m+1), \\ \frac{\lambda}{m+\lambda}, & (i = m+1). \end{cases} \quad (26)$$

由式(2)和式(8)可得  $\mathbf{d}_k$  的初步估计  $\hat{\mathbf{d}}_k^{(0)}$  为式(27):

$$\hat{\mathbf{d}}_k^{(0)} = \mathbf{Y}_{k-1} - \sum_{i=1}^{2m+1} w_M^i \mathbf{h}_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1,i}). \quad (27)$$

式中:  $\mathbf{X}_{k-1,i}$  为 Sigma 点, 由式(24)计算得到。

状态方程未知输入  $\mathbf{b}_{k-1}$  的估计  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1}$  仍由式(7)

给出, 量测方程未知输入  $\mathbf{d}_k$  的估计  $\hat{\mathbf{d}}_k$  仍由式(10)给出, 而精确的状态方程和量测方程中的未知输入分量应直接令其等于 0。

### 2.3 一步自校准预测

一步自校准预测  $\hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)}$  为式(28):

$$\hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} = \sum_{i=1}^{2m+1} w_M^i \mathbf{X}_{k/(k-1),i}. \quad (28)$$

式中:

$$\mathbf{X}_{k/(k-1),i} = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1,i}) + \hat{\mathbf{b}}_{k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, 2m+1. \quad (29)$$

一步预测误差协方差矩阵  $\mathbf{P}_{k/(k-1)}$  由式(30)给出:

$$\mathbf{P}_{k/(k-1)} = \sum_{i=1}^{2m+1} [w_C^i (\mathbf{X}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)}) (\mathbf{X}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)})^T] + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (30)$$

式中:  $w_C^i$  为协方差权重系数, 由式(31)计算:

$$w_C^i = \begin{cases} \frac{1}{2(m+\lambda)}, & (i = 1, 2, \dots, m, m+2, \dots, 2m+1), \\ \frac{\lambda}{m+\lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta), & (i = m+1). \end{cases} \quad (31)$$

式中:  $\beta$  为调节参数。

滤波初始化由式(32)和式(33)给出:

$$\hat{\mathbf{X}}_0 = E(\mathbf{X}_0), \quad (32)$$

$$\mathbf{P}_0 = E[(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0)(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0)^T]. \quad (33)$$

### 2.4 量测自校准更新

重新进行 Sigma 点采样, 得到 Sigma 点集

$\{\mathbf{X}_{k/(k-1),i}\}$  为式(34):

$$\mathbf{X}_{k/(k-1),i} = \begin{cases} \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} - (\sqrt{(m+\lambda)\mathbf{P}_{k/(k-1)}})_i, & (i = 1, 2, \dots, m); \\ \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)}, & (i = m+1); \\ \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} + (\sqrt{(m+\lambda)\mathbf{P}_{k/(k-1)}})_{i-m-1}, & (i = m+2, \dots, 2m+1). \end{cases} \quad (34)$$

由式(35)进行状态估计:

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} + \mathbf{K}_k(\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k). \quad (35)$$

式中:

$$\hat{\mathbf{Y}}_k = \sum_{i=1}^{2m+1} w_M^i \mathbf{Y}_{k,i}, \quad (36)$$

$$\mathbf{Y}_{k,i} = \mathbf{h}_k(\mathbf{X}_{k/(k-1),i}) + \hat{\mathbf{d}}_k, \quad i = 1, 2, \dots, 2m+1. \quad (37)$$

滤波增益矩阵  $\mathbf{K}_k$  由式(38)计算:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{XZ,k} \mathbf{P}_{Z,k}^{-1}. \quad (38)$$

式中:

$$\mathbf{P}_{XZ,k} = \sum_{i=1}^{2m+1} [w_C^i (\mathbf{X}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)}) (\mathbf{Y}_{k,i} - \hat{\mathbf{Y}}_k)^T], \quad (39)$$

$$\mathbf{P}_{Z,k} = \sum_{i=1}^{2m+1} [w_C^i (\mathbf{Y}_{k,i} - \hat{\mathbf{Y}}_k) (\mathbf{Y}_{k,i} - \hat{\mathbf{Y}}_k)^T] + \mathbf{R}_k. \quad (40)$$

状态估计误差协方差矩阵  $\mathbf{P}_k$  由式(41)给出:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k/(k-1)} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{Z,k} \mathbf{K}_k^T. \quad (41)$$

### 3 两步自校准滤波方法

式(5)的  $\mathbf{b}_{k-1} \approx \mathbf{b}_{k-2}$  和式(8)的  $\mathbf{d}_k \approx \mathbf{d}_{k-1}$ , 在相邻两次滤波的时间间隔足够小时有很高的精度, 能满足工程上绝大多数情况的需求。对于工程上滤波时间间隔并非足够小的情况, 则可采用两步自校准滤波方法进行状态估计。

两步自校准滤波方法的基本思想: 首先, 根据  $\mathbf{b}_{k-1} \approx \mathbf{b}_{k-2}$  和  $\mathbf{d}_k \approx \mathbf{d}_{k-1}$ , 由第  $k-1$  步的滤波结果计算  $\mathbf{b}_{k-1}$  和  $\mathbf{d}_k$  的估计  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1}$  和  $\hat{\mathbf{d}}_k$ , 并进行第  $k$  步滤波; 然后, 根据第  $k$  步滤波结果, 重新计算  $\mathbf{b}_{k-1}$  和  $\mathbf{d}_k$  的估计  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1}$  和  $\hat{\mathbf{d}}_k$ , 并重新进行第  $k$  步滤波得到最终的状态估计  $\hat{\mathbf{X}}_k$ 。这样, 对未知输入  $\mathbf{b}_{k-1}$  和  $\mathbf{d}_k$  的估计既采用了第  $k-1$  步的信息又采用了第  $k$  步的信息, 是利用前一步信息和当前时刻信息的综合估计结果, 所以具有更好的鲁棒性和更高的精度, 受滤波时间间隔影响也较小。

针对上文中的双未知输入自校准滤波, 两步法的步骤为: 首先, 由式(6)和式(9)直接计算  $\mathbf{b}_{k-1}$  和  $\mathbf{d}_k$  的估计  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1}$  和  $\hat{\mathbf{d}}_k$ , 并进行第  $k$  步自校准滤波, 得到状态估计  $\hat{\mathbf{X}}_k^{(1)}$  及其估计误差协方差矩阵  $\mathbf{P}_k^{(1)}$ ; 然后, 根据这一滤波结果, 由式(42)和式(43)重新计算  $\mathbf{b}_{k-1}$  和  $\mathbf{d}_k$  的初步估计  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1}^{(0)}$  和  $\hat{\mathbf{d}}_k^{(0)}$ :

$$\hat{\mathbf{b}}_{k-1}^{(0)} = \hat{\mathbf{X}}_k^{(1)} - \frac{1}{4m} \sum_{i=1}^{4m} \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1,i}), \quad (42)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_k^{(0)} = \mathbf{Y}_k - \frac{1}{4m} \sum_{i=1}^{4m} \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\chi}_{k,i}^{(1)}). \quad (43)$$

式中:  $\boldsymbol{\chi}_{k,i}^{(1)}$  为秩采样点,是将式(4)中的  $\boldsymbol{\chi}_{k-1,i}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$  和  $\mathbf{P}_{k-1}$  分别换成  $\boldsymbol{\chi}_{k,i}^{(1)}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_k^{(1)}$  和  $\mathbf{P}_k^{(1)}$  计算得到。最后,进行第  $k$  步自识别自校准滤波,得到最终的状态估计  $\hat{\mathbf{X}}_k$ 。

针对双未知输入自校准无迹滤波,两步法的步骤为:首先,由式(25)和式(27)直接计算  $\mathbf{b}_{k-1}$  和  $\mathbf{d}_k$  的估计  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1}$  和  $\hat{\mathbf{d}}_k$ , 并进行第  $k$  步自校准滤波,得到状态估计  $\hat{\mathbf{X}}_k^{(1)}$  及其估计误差协方差矩阵  $\mathbf{P}_k^{(1)}$ ; 然后,根据这一滤波结果,由式(44)和式(45)重新计算  $\mathbf{b}_{k-1}$  和  $\mathbf{d}_k$  的初步估计  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1}^{(0)}$  和  $\hat{\mathbf{d}}_k^{(0)}$ :

$$\hat{\mathbf{b}}_{k-1}^{(0)} = \hat{\mathbf{X}}_k^{(1)} - \sum_{i=1}^{2m+1} w_M^i \mathbf{f}_{k-1}(\boldsymbol{\chi}_{k-1,i}), \quad (44)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_k^{(0)} = \mathbf{Y}_k - \sum_{i=1}^{2m+1} w_M^i \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\chi}_{k,i}^{(1)}). \quad (45)$$

式中:  $\boldsymbol{\chi}_{k,i}^{(1)}$  为 Sigma 点,是将式(24)中的  $\boldsymbol{\chi}_{k-1,i}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$  和  $\mathbf{P}_{k-1}$  分别换成  $\boldsymbol{\chi}_{k,i}^{(1)}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_k^{(1)}$  和  $\mathbf{P}_k^{(1)}$  计算得到。最后,进行第  $k$  步自识别自校准滤波,得到最终的状态估计  $\hat{\mathbf{X}}_k$ 。

同样,两步自校准滤波方法还可用于线性自校准滤波和扩展自校准滤波<sup>[2-3]</sup>。此外,也适用于线性和非线性量测数据自校准融合<sup>[7-8]</sup>,形成两步量测数据自校准融合方法。

#### 4 仿真算例

考虑如下由式(46)和式(47)给出的非线性系统:

$$X_k = 0.7X_{k-1} + \frac{25X_{k-1}}{1 + X_{k-1}^2} + b_{k-1} + W_{k-1}, \quad (46)$$

$$\mathbf{Y}_k = \begin{bmatrix} 0.07X_k^2 \\ 2\sin(X_k^2) \end{bmatrix} + \mathbf{d}_k + \mathbf{V}_k. \quad (47)$$

式中:  $X_k$  表示系统状态值,  $\mathbf{Y}_k$  表示量测值;  $W_{k-1}$  和  $\mathbf{V}_k$  是服从高斯分布的零均值随机噪声,其方差分别为  $Q_{k-1} = 0.09$  和  $\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} 0.36 & 0 \\ 0 & 0.36 \end{bmatrix}$ 。状态初值  $X_0 = 20$ 。

状态方程未知输入  $b_{k-1}$  的取值为式(48):

$$b_{k-1} = \begin{cases} 0, & (1 \leq k \leq 100); \\ 5, & (101 \leq k \leq 200); \\ 0, & (201 \leq k \leq 300); \\ 5, & (301 \leq k \leq 400). \end{cases} \quad (48)$$

量测方程未知输入  $\mathbf{d}_k$  的取值为式(49):

$$\mathbf{d}_k = \begin{cases} [0 \ 0]^T, & (1 \leq k \leq 200); \\ [0 \ 10]^T, & (201 \leq k \leq 400). \end{cases} \quad (49)$$

分别采用无迹 Kalman 滤波方法和本文的双未知输入自校准秩滤波方法、双未知输入自校准无迹滤波方法进行滤波。取滤波初始值  $\hat{\mathbf{X}}_0 = 19$ , 误差方差初始值  $\mathbf{P}_0 = 1$ 。对系统进行 5000 次蒙特卡洛仿真模拟,分别求得上述方法的均方根误差如图 1 所示,均方根误差的均值见表 1。

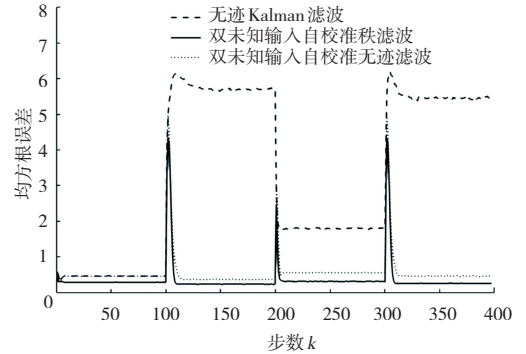


图 1 滤波均方根误差比较

Fig. 1 Comparison of root mean square errors in filtering

表 1 滤波均方根误差均值比较

Tab. 1 Comparison of means of root mean square errors in filtering

方法	均方根误差均值
无迹 Kalman 滤波	3.376 5
双未知输入自校准秩滤波	0.368 1
双未知输入自校准无迹滤波	0.580 8

从图 1 和表 1 可以看到,当非线性系统受到双未知输入影响时,本文提出的方法可以发挥自识别自校准的优势,自动对双未知输入进行识别、估计、补偿和修正。双未知输入自校准秩滤波方法和双未知输入自校准无迹滤波方法的精度分别比无迹 Kalman 滤波方法的精度提高了 8.1 倍和 4.8 倍。而且,若采用本文的两步自校准滤波方法,还能够进一步提高精度。

此外,由于秩采样属于最佳采样,所以双未知输入自校准秩滤波方法的精度又要比双未知输入自校准无迹滤波方法的精度略高一些。特别是大量仿真验证表明,双未知输入自校准秩滤波方法对于非高斯分布情况也具有很高的估计精度。

#### 5 结束语

(1) 由于干扰和噪声,非线性系统的状态方程和量测方程往往均含有未知输入(未知系统误差),本文提出的非线性系统双未知输入自校准滤波方

法,能够自动对这两种未知输入进行识别、估计和补偿,消除系统误差,提高滤波精度。

(2) 本文方法包括双未知输入自校准秩滤波方法和双未知输入自校准无迹滤波方法。若令  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1} = \mathbf{0}$ , 则它们成为只有量测方程含未知输入的自校准秩滤波方法和自校准无迹滤波方法;若令  $\hat{\mathbf{d}}_k = \mathbf{0}$ , 则它们成为只有状态方程含未知输入的自校准秩滤波方法和自校准无迹滤波方法。

(3) 当未知输入  $\mathbf{b}_{k-1}$  或  $\mathbf{d}_k$  被包含在某一函数  $\varphi(\mathbf{b}_{k-1})$  或  $\psi(\mathbf{d}_k)$  中时,同样可由式(5)或式(8)求得  $\mathbf{b}_{k-1}$  或  $\mathbf{d}_k$  的估计  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1}$  或  $\hat{\mathbf{d}}_k$ , 并进行自校准滤波。

(4) 未知输入  $\mathbf{b}_{k-1}$  或  $\mathbf{d}_k$  也可以是某种待定参数,此时求得  $\mathbf{b}_{k-1}$  或  $\mathbf{d}_k$  的估计  $\hat{\mathbf{b}}_{k-1}$  或  $\hat{\mathbf{d}}_k$  后,可以不进行自识别,直接进行自校准滤波。

(5) 本文建立的两步自校准滤波方法和两步量测数据自校准融合方法,可以综合利用前一步信息和当前时刻信息估计未知输入,所以能够进一步提高自

校准滤波和量测数据自校准融合的鲁棒性和精度,且受相邻两次滤波(量测)时间间隔影响也较小。

## 参考文献

- [1] KALMAN R E. A new approach to linear filtering and prediction problems [J]. Journal of Basic Engineering, 1960, 82 (Series D): 35-45.
- [2] 傅惠民, 杨海峰, 付越帅. 自识别自校准滤波方法 [J]. 机电产品开发与创新, 2019, 32(6): 8-12.
- [3] 傅惠民, 杨海峰, 付越帅, 等. 含缓变未知输入的数据自校准滤波方法 [J]. 智能计算机与应用, 2020, 10(1): 7-11.
- [4] 傅惠民, 杨海峰, 文歆磊. 非线性自识别自校准 Kalman 滤波方法 [J]. 控制与信息技术, 2019, (5): 7-11.
- [5] 傅惠民, 肖强, 吴云章, 等. 秩滤波方法 [J]. 机械强度, 2014, 36(4): 521-526.
- [6] JULIER S J, UHLMANN J K, DURRANT-WHYTE H F. A new approach for filtering nonlinear systems [C]// Proceedings of the American Control Conference, Seattle, WA, USA, Jun. 1995: 1628-1632.
- [7] 傅惠民, 杨海峰, 文歆磊. 量测数据自校准融合方法 [J]. 航空动力学报, 2019, 34(8): 1759-1763.
- [8] 傅惠民, 崔轶. 非线性量测数据融合与自校准方法 [J]. 智能计算机与应用, 2020, 10(7): 5-10.

(上接第 3 页)

接近全监督模型的结果,基于元学习的思想学习出一个 base 的二元分割模型,在一定意义上模型学到了分割物体的能力。在半监督的学习中,将 1/8 的 Ground Truth 混合到生成的 Region Proposals 中。

表 1 在 Pascal VOC 2012 验证集上的实验结果对比

Tab. 1 Experiments compared in Pascal VOC 2012 val dataset

Supervise	#GT	#Bounding Box	Methods	mIoU
Weakly	-	10582	BoxSup	62.0
			WSSL	60.6
			SDI	65.7
			BCM-FR	66.8
			Ours	<b>68.3</b>
Semi	1464	9118	BoxSup	62.1
			WSSL	63.5
			SDI	65.8
			BCM-FR	67.5
			Ours	<b>68.5</b>
Fully	10582	-	DeepLab-V1-LargeFOV	69.6

## 4 结束语

本文在基于边界框标签的弱监督学习图像语义分割的研究基础上,提出了在额外数据集上,学习出生成图像区域建议的二元分割模型,用这些与类别无关的图像区域建议作为伪标签,在基准数据集上学习出全监督的分割模型。区别于基于边界框标签的弱监督的手工设计生成图像区域建议,本文是基于学习来生成,在 Pascal VOC 2012 验证集来看,弱

监督上 mIoU 达到 68.3%,半监督上 68.5%,均比其他研究高很多,实验结果也证明本文提出的方法的创新性和可靠性。但本文方法与全监督的方法依然存在着差距,这说明弱监督方法存在着可提升空间,期待继续研究。

## 参考文献

- [1] DAI J, HE K, SUN J. Box Sup: Exploiting Bounding Boxes to Supervise Convolutional Networks for Semantic Segmentation [C/OL]// ICCV '15: Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). USA: IEEE Computer Society, 2015: 1635-1643. <http://dx.doi.org/10.1109/ICCV.2015.191>.
- [2] ROTHER C, KOLMOGOROV V, BLAKE A. GrabCut - Interactive Foreground Extraction using Iterated Graph Cuts [J]. ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH), 2004.
- [3] PAPANDREOU G, CHEN L C, MURPHY K P, et al. Weakly- and Semi-Supervised Learning of a Deep Convolutional Network for Semantic Image Segmentation [C/OL] // ICCV '15: Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). USA: IEEE Computer Society, 2015: 1742-1750. <http://dx.doi.org/10.1109/ICCV.2015.203>.
- [4] KHOREVA A, BENENSON R, HOSANG J, et al. Simple Does It: Weakly Supervised Instance and Semantic Segmentation [C] // The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2017.
- [5] SONG C, HUANG Y, OUYANG W, et al. Box-Driven Class-Wise Region Masking and Filling Rate Guided Loss for Weakly Supervised Semantic Segmentation [C] // The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2019.