文章编号：2095-2163(2020)07-0071-05 中图分类号：TP273 文献标志码：A

带 Markov 跳跃的中立型混合时滞系统的 H_∞ 滤波

蒋 琳，高 燕
（上海工程技术大学 电子电气工程学院，上海 201600）

摘 要：本文设计了一种带马尔科夫跳变的中立型混合时滞系统的 H_∞ 滤波器，目的是将分布时滞和马尔科夫跳引入中立型时滞系统。利用 Lyapunov 稳定理论，构造了新的 L-K（Lyapunov-Krasovskii）泛函，用积分不等式方法并结合线性矩阵不等式技术，使得具有马尔科夫跳的中立型时滞系统的滤波误差系统满足一定的渐进稳定条件。在保证 H_∞ 范数小于一定的性能指标条件下，得到 H_∞ 滤波存在的一些充分条件，通过数值仿真得到滤波器的误差图。

关键词：中立型时滞系统；分布时滞；马尔科夫跳；积分不等式；H_∞ 滤波

H_∞ Filtering for Neutral Hybrid Delay Systems with Markov Jump

JIANG Lin, GAO Yan
(School of Electrical and Electronic Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201600, China)

[Abstract] A filter for a neutral distributed delay system with Markov transitions is mainly designed. The purpose is to introduce distributed variable delays and Markov jumps into neutral delay systems. Using the Lyapunov stability theory, a new LK (Lyapunov -Krasovskii) functional is constructed. The integral inequality method is combined with the linear matrix inequality technology to make the filtering error system of a Markov-jumped neutral time-delay system satisfies certain asymptotic stability conditions. Under the condition that the norm is less than a certain performance index, some sufficient conditions for filtering exist, and the error of the filter is obtained through numerical simulation.

[Key words] Neutral delay System; Distributed time delay; Markov jump; Integral inequality; H_∞ filtering

0 引 言

时滞现象广泛存在于很多实际系统中，如：通讯系统信号传递延迟，网络控制系统等。而分布时滞系统主要出现在各类不均匀延迟系统中，由于很小的时间滞后，也会对系统产生很大的影响。

H_∞ 滤波是通过使用测量信号来估计系统状态，进而涉及稳定的滤波器，使得从干扰输入到估计误差输出的 H_∞ 范数小于某一给定的值的一种滤波方法。1989 年 Elsayed 和 Grimble 首先应用多项式方法提出了 H_∞ 滤波问题[1]。随后，关于 H_∞ 滤波的研究引起了中内外学者的广泛关注。结合时滞系统的中立型系统的 H_∞ 滤波研究更是得到众多学者的关注[2]。为了研究系统稳定性，一般方法有构造 L-K（Lyapunov-Krasovskii）泛函。而 L-K 泛函产生的积分项的估计方法一般有：模型变换和自由权矩阵，以及积分不等式这几种方法。本文将积分不等式中的 Jesen 不等式方法用于积分项的估计，研究了中立型混合时滞系统。研究了具有马尔科夫跳变的中立型混合时滞系统的 H_∞ 滤波，在构造 L-K 泛函时，对积分项进行简化处理，来研究本文所设计的滤波器，减少了混合时滞带来的计算复杂度，并通过仿真验证达到设计目的。

1 问题描述以及系统建模

1.1 系统模型

首先，考虑如下具有马尔科夫跳变的分布变时滞的中立型时滞系统(1)：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - G(rt)\dot{x}(t-\tau_{rt}) = A_1(rt)x(t) + A_2(rt)x(t - \\ \qquad \tau_{rt}) + A_3(rt)\int_{t-\tau_{rt}}^{T} x(s)ds + B(rt)v(t) \\ y(t) = C_1(rt)x(t) + C_2(rt)x(t-\tau_{rt}) + D(rt)v(t) \\ Z(t) = L(rt)x(t) \\ x(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in [-\tau, 0). \end{cases} \tag{1}$$

其中：$x(t) \in R^n$ 是系统的状态向量；$y(t) \in R^n$ 是测量输出；$\nu(t) \in R^q$ 是扰动输入，且属于 $L_2[0,+\infty)$；$z(t) \in R^p$ 是待测量的信号向量；$A_1(rt)$，$A_2(rt)$，$A_3(rt)$，$B(rt)$，$C_1(rt)$，$C_2(rt)$，$D(rt)$，$G(rt)$ $L(rt)$ 是适当维数的已知的实矩阵。$\varphi(t)$ 是给定的初始向量函数，且在区间 $[-\tau, 0]$ 上连续；概

作者简介：蒋 琳(1992-)，女，硕士研究生，主要研究方向：时滞系统的稳定性及 H_∞ 滤波、故障检测；高 燕(1985-)，女，博士，讲师，硕士生导师，主要研究方向：神经网络分析与自适应同步。
通讯作者：高 燕 Email：gy@sues.edu.cn.

收稿日期：2020-04-03

率矩阵 $\Pi = (\pi_{ij})_{i,j\in\wedge}$，满足：$\{r_t, t > 0\}$ 是在有限状态集 $\{1,2,\dots N\}$ 中取值的连续 Markov 跳过程，公式(2)。

$$Pr\{r_{t+dt} = j \mid r_t = i\} = \begin{cases} \pi_{ij}(t)dt + o(dt), i \neq j \\ 1 + \pi_{ii}(t)dt + o(dt), i = j \end{cases} \quad (2)$$

其中，$dt > 0$，$\lim\limits_{dt\to\infty}\dfrac{o(dt)}{dt} = 0$，当 $i \neq j$，$\pi_{ij}(t) > 0$ 是从模态 i 到模态 j 的转移率。并且满足式(3)：

$$\pi_{ii}(t) = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N}\pi_{ij}(t). \quad (3)$$

为了方便描述，令 $r_t = i$，且 $i \in \wedge$ 时，$A_1(r_t)$ 表示为：$A_1(i)$，其他以此类推。

在系统(1)中，$\tau_i(t)$ 代表时变延迟，这里 $t > 0, i = 1\dots N$，且 $i \in s$ 满足式(4)：

$$0 \leqslant \tau_i(t) \leqslant \theta_i, \dot{\tau}_i(t) \leqslant \bar{\theta} < 1. \quad (4)$$

$\theta_i, \bar{\theta}$，是系统(1)中给定的常数量.

本文考虑 H_∞ 滤波器问题，需获得信号 $z(t)$ 的估计号 $\hat{z}(t)$，对于所有扰动 $\nu(t) \in L_2[0, +\infty)$，使得估计误差 $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ 尽量小。设计如式(5)形式的 H_∞ 滤波器：

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_{fi}\hat{x}(t) + B_{fi}y(t), \\ \hat{z}(t) = L_{fi}\hat{x}(t), \\ \hat{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

在系统(5)中，$\hat{x}(t) \in R^n$ 是滤波器的状态向量；$\hat{z}(t) \in R^K$ 是滤波器的被控输出；A_{fi}, B_{fi}, L_{fi} 是滤波器的待求参数。令 $\xi(t) = [x^{\mathrm{T}}(t) \quad \hat{x}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$，$e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$，根据系统(1)和(5)可得到增广的滤波器误差系统(6)为：

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) - \tilde{G}_i(t)S\dot{\xi}(t - \tau(t,i)) = \tilde{A}_{1i}(t)\xi(t) + \tilde{A}_{2i}S\xi(t - \\ \quad \tau(t,i)) + \tilde{A}_{3i}(t)S\int_{t-\tau(t,i)}^{\mathrm{T}}\xi(s)ds + \tilde{B}_i(t)v(t), \\ e(t) = \tilde{L}_i(t)\xi(t), \\ \xi(t) = [0 \quad \varphi^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}], \ \forall t \in [-\tau \quad 0). \end{cases} \quad (6)$$

其中：

$\tilde{A}_{1i} = \begin{bmatrix} A_{1\ i} & 0 \\ B_{fi}C_{1\ i} & A_{fi} \end{bmatrix}$；$\tilde{A}_{2i} = [A_{2i}^{\mathrm{T}} \quad C_{2i}^{\mathrm{T}}B_{fi}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$；

$\tilde{A}_{3i} = [A_{3i}^{\mathrm{T}} \quad 0]^{\mathrm{T}}$；$\tilde{B}_i = [B_i^{\mathrm{T}} \quad D_i^{\mathrm{T}}B_{fi}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$；

$\tilde{L}_i = [L_i \quad -L_{f\ i}]$；$\tilde{G}_i = [G_i^{\mathrm{T}} \quad 0]^{\mathrm{T}}$；

$S = [I \quad 0]$；

本文研究了带马尔科夫跳变的不确定中立型分布时滞系统的 H_∞ 滤波问题：在给定常数 $\gamma > 0$ 情况下，通过设计滤波器参数，确定一个渐近稳定滤波器(5)，使得滤波误差系统(6)是渐近稳定的，并且满足在给定的噪声衰减水平 γ 下，即在零初始条件 $x_e(t) = 0, t \in [-\tau, 0)$ 下，对于任意的非零噪声 $\nu(t) \in L_2[0, +\infty)$，有：$\| \tilde{z}(t) \|_2 \leqslant \gamma^2 \| \nu(t) \|_2$。

在这种条件下，则称滤波误差系统满足 H_∞ 滤波噪声衰减水平 γ。

1.2 滤波性能分析

引理1(Schur 补定理) 对给定的对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$，其中，$S_{11}$ 是 $r\times r$ 维的，则以下3个不等式是等价的：

(1) $S < 0$.

(2) $S_{11} < 0, S_{22} - S^{\mathrm{T}}{}_{12}S^{-1}{}_{11}S_{12} < 0$.

(3) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12}S^{-1}{}_{22}S^{\mathrm{T}}{}_{12} < 0$.

引理2(Jesen 不等式) 如果存在一个向量函数 $\omega(s) \in [0:b-a]$，且满足式 $a > 0$ 和 $b > 0$，则存在任意正定矩阵 W，使得下面不等式成立：

$$-\int_a^b \omega^{\mathrm{T}}(s)W\omega(s)ds \leqslant -\frac{1}{(b-a)}\left[\int_a^b \omega(s)ds\right]^{\mathrm{T}} W\int_a^b \omega(s)ds.$$

定理1 给定一个标量 $\gamma > 0$，则滤波误差系统(6)满足噪声衰减水平 γ 的充分条件是：存在对称矩阵满足：$0 < P_i \in \mathbb{R}^{2(n-m)\times 2(n-m)}, 0 < Q_i \in \mathbb{R}^{(n-m)\times 2(n-m)}$，

$0 < Q \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}, 0 < R \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$，

$Z \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$；

$$\sum\nolimits_{j=1, j\neq i}^{N}\theta_{ij}Q_j - Q \leqslant 0, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ * & \Theta_{22} \end{bmatrix} < 0. \quad (8)$$

其中：

$$\Theta_{11} = \begin{bmatrix} \Xi & P_i\tilde{A}_{2i} & P_i\tilde{G}_i & P_i\tilde{A}_{3i} \\ * & -(1-\dot{\tau}_i)Q_i & 0 & 0 \\ * & * & -(1-\dot{\tau}_i)R & 0 \\ * & * & * & -Z \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{12} = \begin{bmatrix} 0 & P_i\tilde{B}_i & \tilde{L}_i{}^{\mathrm{T}} & \tilde{A}_{1i}{}^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{2i}{}^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_i{}^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{3i}{}^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{21}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\tau}R & 0 & 0 & 0\\ * & -\gamma^2 I & 0 & 0\\ * & * & -I & 0\\ * & * & * & -\tau^{-1}R^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$\Xi=\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}P_j+P_i\tilde{A}_{1i}(t)+\tilde{A}^{\mathrm{T}}{}_{1i}P_i^{\mathrm{T}}+S^{\mathrm{T}}[Q_i+\tau Q+\tau^2 Z]S$$

证　明　$\bar{\zeta}=[\zeta^{\mathrm{T}}(t)\quad \zeta^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)]^{\mathrm{T}}$，由误差系统可得：

$$\dot{\xi}(t)=\tilde{A}_{1i}(t)\xi(t)+\tilde{A}_{2i}S\xi(t-\tau(t,i))+\tilde{G}_i(t)S\dot{\xi}(t-\tau(t,i))+\tilde{A}_{3i}(t)S\int_{t-\tau(t,i)}^{\mathrm{T}}x(s)ds.$$

首先证明当 $\nu(t)=0$ 时系统(6)是渐进稳定的。令：

$$V=\xi^{\mathrm{T}}(t)P_i\xi(t)+\int_{t-\tau_i}^{\mathrm{T}}\xi^{\mathrm{T}}(s)S^{\mathrm{T}}Q_iS\xi(s)ds+\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{\mathrm{T}}\xi^{\mathrm{T}}(s)S^{\mathrm{T}}QS\xi(s)dsd\theta+\int_{t-\tau_i}^{\mathrm{T}}\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(s)S^{\mathrm{T}}RS\dot{\xi}(s)ds+\int_{0}^{\tau}\int_{t-\tau}^{\mathrm{T}}(s-t+\tau)\xi^{\mathrm{T}}(s)S^{\mathrm{T}}ZS\xi(s)dsd\theta$$

则可得弱无穷小算子：

$$\Im V=\xi^{\mathrm{T}}(t)\Big(\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}P_j\Big)\xi(t)+2\xi^{\mathrm{T}}(t)P_i(\tilde{A}_{1i}(t)\xi(t)+\tilde{A}_{2i}S\xi(t-\tau(t,i))+\tilde{G}_i(t)S\dot{\xi}(t-\tau(t,i))+\tilde{A}_{3i}(t)S\int_{t-\tau_i}^{\mathrm{T}}\xi(s)ds)+\xi^{\mathrm{T}}(t)S^{\mathrm{T}}Q_iS\xi(t)-(1-\dot{\tau}_i)\xi^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)S^{\mathrm{T}}Q_iS\xi(t-\tau_i)+\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}\int_{t-\tau_j}^{\mathrm{T}}\xi^{\mathrm{T}}(s)S^{\mathrm{T}}Q_jS\xi(s)ds+[\tau\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t)S^{\mathrm{T}}QS\dot{\xi}(t)-\int_{t-\tau}^{\mathrm{T}}\xi^{\mathrm{T}}(s)S^{\mathrm{T}}QS\xi(s)ds]+\tau^2\xi^{\mathrm{T}}(t)S^{\mathrm{T}}ZS\xi(t)-[\int_{t-\tau}^{\mathrm{T}}\xi^{\mathrm{T}}(s)Sds]^{\mathrm{T}}Z[\int_{t-\tau}^{\mathrm{T}}\xi^{\mathrm{T}}(s)S^{\mathrm{T}}ds].$$

其中：

$$\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}\int_{t-\tau_j}^{\mathrm{T}}\xi^{\mathrm{T}}(s)S^{\mathrm{T}}Q_jS\xi(s)ds\leqslant\int_{t-\tau}^{\mathrm{T}}\xi^{\mathrm{T}}(s)S^{\mathrm{T}}(\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\theta_{ij}Q_j)S\xi(s)ds\leqslant\int_{t-\tau}^{\mathrm{T}}\xi^{\mathrm{T}}(s)S^{\mathrm{T}}QS\xi(s)ds.$$

且：

$$-\int_{t-\tau}^{\mathrm{T}}\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(s)S^{\mathrm{T}}RS\dot{\xi}(s)ds\leqslant-\frac{1}{\tau}(\int_{t-\tau}^{\mathrm{T}}\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(s)Sds)^{\mathrm{T}}R(\int_{t-\tau}^{T}\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(s)S^{\mathrm{T}}ds).$$

综上：则可得：$\Im V\leqslant \Upsilon^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\Upsilon$.

其中：

$$M=\Lambda_{11}+\Lambda_{12}$$

$$\Upsilon=[\xi^{\mathrm{T}}(t)\quad \xi^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)S^{\mathrm{T}}\quad \dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)S^{\mathrm{T}}\quad \int_{t-\tau_i}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(s)S^{\mathrm{T}}ds\quad \int_{t-\tau}^{t}\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(s)S^{\mathrm{T}}ds]^{\mathrm{T}}$$

$$\Lambda_{11}=\begin{bmatrix}\Xi & P_i\tilde{A}_{2i} & P_i\tilde{G}_i & P_i\tilde{A}_{3i} & 0\\ * & -(1-\dot{\tau}_i)Q_i & 0 & 0 & 0\\ * & * & -(1-\dot{\tau}_i)R & 0 & 0\\ * & * & * & -Z & 0\\ * & * & * & * & -\frac{1}{\tau}R\end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{12}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{1i}^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}\\ \tilde{A}_{2i}^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}\\ \tilde{G}_i^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}\\ \tilde{A}_{3i}^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}\\ 0\end{bmatrix}(\tau R^{-T})\begin{bmatrix}\tilde{A}_{1i}^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}\\ \tilde{A}_{2i}^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}\\ \tilde{G}_i^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}\\ \tilde{A}_{3i}^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}\\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

由引理 2 可知：式(8)能够满足 $\Omega<0$，从而使得 $\Im V<0$，则可得滤波误差系统(6)稳定。考虑到 H_∞ 性能指标：对于任意非零扰动 $\nu(t)\in L_2[0,+\infty)$，满足式(9)：

$$J=\int_0^\infty[e^{\mathrm{T}}(t)e(t)-\gamma^2\nu^{\mathrm{T}}(t)\nu(t)]dt=\int_0^\infty[e^{\mathrm{T}}(t)e(t)-\gamma^2\nu^{\mathrm{T}}(t)\nu(t)+\dot{V}[\xi,t]]dt+V[\xi,t]|_{t=0}-V[\xi,t]|_{t\to\infty}.\tag{9}$$

定义：

$$\Upsilon_1=[\xi^{\mathrm{T}}(t)\quad \xi^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\quad \dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\quad \int_{t-\tau_i}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(s)ds\quad \int_{t-\tau}^{t}\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(s)ds\quad \nu(t)]^{\mathrm{T}}.\tag{10}$$

结合 Schur 补定理，式(9)满足式(11)：

$$J\leqslant\int_0^\infty(\Upsilon_1)^{\mathrm{T}}\Lambda(\Upsilon_1)dt.\tag{11}$$

将公式 J 进行 schur 补定理，可得式(8)，则进一步可得在任意非 0 条件下，系统性能指标满足 $J<0$ 时，可得滤波误差系统(6)能够保证一定噪声

干扰水平。

2 H_∞ 滤波设计

定理 2 当滤波误差系统(6)满足噪声衰减水平 $\gamma > 0$ 时,则存在对称矩阵满足:$0 < Y_i$,$0 < H_i$,$0 < U_i$,$0 < V_i$,$0 < W_i$,$0 < P_i$,$0 < Q_i$,$0 < R_i$,$Z \in \mathbb{R}$;对于任意的模态 $i \in s$,不等式(12)和不等式(13)成立:

$$H_i - Y_i < 0, \tag{12}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ * & \Gamma_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

其中:$\Gamma_{11} = \begin{bmatrix} \aleph_{11} & \aleph_{12} & \aleph_{13} & \aleph_{14} & \aleph_{15} \\ * & \aleph_{22} & \aleph_{23} & \aleph_{24} & \aleph_{25} \\ * & * & \aleph_{33} & 0 & \aleph_{35} \\ * & * & * & \aleph_{44} & 0 \\ * & * & * & * & -Z \end{bmatrix}$

$$\Gamma_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \aleph_{17} & \aleph_{18} & \aleph_{19} \\ 0 & \aleph_{27} & -W_i^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & \aleph_{37} & 0 & A_{2i}^{\mathrm{T}} R^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & 0 & G_i^{\mathrm{T}} R^{\mathrm{T}} \\ 0 & \aleph_{57} & 0 & A_{3i}^{\mathrm{T}} R^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} R & 0 & 0 & 0 \\ * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -\tau^{-1} R \end{bmatrix}$$

$\aleph_{11} = \sum_{j=1}^{N} \theta_{ij} H_j + H_i A_{1\ i} + A_{1\ i}^{\mathrm{T}} H_i^{\mathrm{T}} + [Q_i + \tau Q + \tau^2 Z]$;

$\aleph_{12} = C_{1\ i}^{\mathrm{T}} V_i^{\mathrm{T}} + U_i^{\mathrm{T}} - A_{1\ i}^{\mathrm{T}} (H_i - Y_i)^{\mathrm{T}}$;$\aleph_{13} = H_i A_{2\ i}$;

$\aleph_{14} = H_i G_i$;$\aleph_{15} = H_i A_{3i}$;$\aleph_{17} = H_i B_i$;

$\aleph_{18} = L^{\mathrm{T}} - W_i^{\mathrm{T}}$;$\aleph_{19} = A_{1\ i}^{\mathrm{T}} R^{\mathrm{T}}$;

$\aleph_{22} = \sum_{j=1}^{N} \theta_{ij} (Y_j - H_j) + U_i + U_i^{\mathrm{T}}$;

$\aleph_{23} = U_i - A_{2\ i}(Y_i - H_i)$;$\aleph_{24} = (H_i - Y_i) G_i$;

$\aleph_{25} = (H_i - Y_i) A_{3i}$;$\aleph_{27} = V_i D_i - (Y_i - H_i) B_i$;

$\aleph 33 = -(1 - \dot{\tau}_i) Q_i$;

$\aleph_{39} = A_{3i}^{\mathrm{T}} R^{\mathrm{T}}$;

$\aleph_{44} = -(1 - \dot{\tau}_i) R$;

$\aleph_{49} = G_i^{\mathrm{T}} R^{\mathrm{T}}$;

$\aleph_{59} = A_{3i}^{\mathrm{T}} R^{\mathrm{T}}$.

证明 对于任意的模态 $i \in s$,定义 $P_i = \begin{bmatrix} Y_i & H_i - Y_i \\ H_i - Y_i & Y_i - H_i \end{bmatrix}$,根据 schur 补定理可得:

$$Y_i - (Y_i - H_i)(H_i - Y_i)^{-1}(Y_i - H_i) = H_i > 0;$$

且由定理 2 可得:$Y_i - H_i > 0$,即 $P_i > 0$

令:$J_i = \begin{bmatrix} H_i^{-1} & 0 \\ H_i^{-1} & I \end{bmatrix}$,

定义 $\nu_1 = diag\{J \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I\}$;

式(8)分别左乘和右乘 ν_1^{T} 和 ν_1,得到式(14):

$$\mathrm{T} = \nu_1^{\mathrm{T}} \Psi \nu_1. \tag{14}$$

再定义 $\nu_2 = diag\{H_i \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I\}$,

滤波器参数为:

$A_{fi} = (Y_i - H_i)^{-1} U_i$;$B_{fi} = (Y_i - H_i)^{-1} V_i$;$L_{fi} = W_i$;

同样用 ν_2 和其转置分别左乘和右乘(11),则可得式(10),则证明完成。

3 数值例子仿真

例: 通过定理中公式(9)与公式(10)来描述带马尔科夫的中立型混合时滞系统:

模态 1:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 0.3 \\ -0.8 & -1.5 \end{bmatrix};A_{21} = \begin{bmatrix} 0.78 & 0.1 \\ 0.12 & -0.2 \end{bmatrix};$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & -0.4 \end{bmatrix};C_{11} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix};$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ -0.26 & 0.4 \end{bmatrix};G_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix};$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix};D_1 = \begin{bmatrix} 0.51 \\ -0.1 \end{bmatrix};L_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.13 \\ 1.86 & -0.8 \end{bmatrix};$$

模态 2:

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -0.62 & 0.1 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix};A_{22} = \begin{bmatrix} -0.21 & 0 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix};$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} -0.37 & 0.1 \\ 0.23 & 0 \end{bmatrix};C_{12} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix};$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix};G_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix};$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix};D_2 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.32 \end{bmatrix};L_2 = \begin{bmatrix} -2.41 & 0.2 \\ 2 & -0.7 \end{bmatrix}.$$

取 $\gamma = 0.5 \tau = \theta_1 = \theta_2 = 0.6$;$\dot{\tau}_i = \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = 0.5$.

通过 LMI 工具箱求得:

$$AF1 = \begin{bmatrix} 0.046\,24 & -0.016\,9 \\ 0.048\,2 & 0.164\,9 \end{bmatrix};$$

$$AF2 = \begin{bmatrix} -0.720\,7 & 0.946\,7 \\ 0.825\,0 & -1.345\,3 \end{bmatrix};$$

$$BF1 = \begin{bmatrix} -0.047\,1 & 2.025\,3 \\ -0.308\,5 & -6.203\,5 \end{bmatrix};$$

$$BF2 = \begin{bmatrix} 1.844\,1 & -0.216\,7 \\ -0.216\,7 & 1.750\,2 \end{bmatrix};$$

(下转第 81 页)