

文章编号: 2095-2163(2020)05-0143-06

中图分类号: TP242.6

文献标志码: A

机械腿逆运动学模型求解

胡平志, 李泽滔

(贵州大学 电气工程学院, 贵阳 550025)

摘要: 为研究四足机器人的运动, 本文利用 DH 参数法建立了单条机械腿的运动学正向模型, 并求解逆模型。但由于各个关节之间被连杆铰接, 造成机械腿末端位置与各个关节角度之间存在耦合性以及非线性, 正是这种耦合和非线性关系导致逆运动方程求解极其困难。本文巧妙利用了这一点, 将这一难点变为了解决问题的关键, 提出了一种迭代法求解逆模型数值解, 并以真实的三自由度的机械腿为例, 对这种迭代求解法进行了验证, 证实了该算法的可行性, 可靠性。

关键词: 机械腿; 逆运动学方程; 迭代求解; 数值解

The solution about inverse kinematic model of robot's leg

HU Pingzhi, LI Zetao

(College of Electrical Engineering, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

[Abstract] In order to study the motion of quadruped robot, DH parameter method is used to establish the kinematic forward model of single mechanical leg and solve the inverse model. However, because each joint is hinged by a connecting rod, there is coupling and nonlinearity between the end position of the mechanical leg and the Angle of each joint, and it is this coupling and nonlinearity that makes it extremely difficult to solve the inverse motion equation. This paper makes good use of this point, turns this difficulty into the key to solve the problem, proposes an iterative method to solve the numerical solution of the inverse model, and takes a real three-degree-of-freedom mechanical leg as an example to verify this iterative method, which proves the feasibility and reliability of the algorithm.

[Key words] robot's leg; inverse kinematic model; iterative solution; Numerical solution

0 引言

近年来, 越来越多机器人被广泛应用。轮式机器人不能适应复杂的地形环境, 飞行机器人虽然能无视地形因素, 但是载重量有限, 成本极高。随着机器人技术的迅猛发展, 对能在复杂环境下行走的特种机器人的需求日益增加。本文以一种十二自由度机器人为研究对象, 该机器人实际包含四个三自由度机械腿, 其关于机器人几何轴心中心对称式排布。机器人的行走, 实际可看作是四条机械腿运动的线性组合, 所以为了研究机器人行走, 就需要优先研究一条机械腿的模型与控制。

对于单腿建模, 学术上通用 DH 矩阵法进行建模^[1], 该模型被称为运动学正模型, 可由每个关节的角度求取末端点的三维空间位置。但是, 实际应用中往往需要利用末端点三维坐标, 逆向求取每个关节的角度, 这就需求取运动学逆模型。然而逆模型方程往往是多元高次方程组, 解析解难以求取, 甚至不存在。多自由度机械腿控制, 采用建立运动

学方程, 由于逆运动学方程中存在交叉项 $\sin(\sum_{i=1}^n \theta_i)$, $\cos(\sum_{i=1}^n \theta_i)$, 所以通常是多元高次方程组, 解析解求取困难甚至不存在, 传统的解决逆问题的办法有两种: (1) 利用多特殊点采样, 再线性插值拟合的办法; (2) 特殊值求解; 方法(1)的不足之处在于, 进行高精度的线性拟合, 需要极大数量的特殊点, 由于只能依靠正向模型计算所得的特殊点, 其空间位置坐标是随机的, 绝大多数点不在期望可行域范围内, 不具备实际使用价值。方法(2)的不足之处在于, 所谓特殊值求解, 一般而言是将多个关节进行合并, 即令 $\sum_{i=1}^n \theta_i = C$ (常数), 来对方程进行简化, 或者利用机械臂结构上的特殊性进行合并化简^[2], 本质上使得高自由度机械腿变为低自由度机械腿。

近年来也出现很多利用智能算法, 对逆运动学方程进行求解的论文, 这些算法包括, 改进粒子群算法^[3], 改进神经网络算法^[4]等。但是实际使用中这些算法存在运算量巨大, 求解速度慢, 求解结果波动

基金项目: 国家自然科学基金(61963009)。

作者简介: 胡平志(1995-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向: 控制科学与工程; 李泽滔(1960-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向: 故障诊断。

通讯作者: 李泽滔 Email: gzulzt@163.com

收稿日期: 2020-03-26

范围大的问题。为更好的解决这一问题,本文提出了一种基于迭代法的方式求解逆模型数值的方法,该方法收敛性好,收敛速度快,准确度高,运算量小,适用范围广。

1 建立坐标系

图1(a)是机械腿的3d模型,图1(b)是机械腿的3d模型主视图,红线是转轴与转轴或者转轴与端点之间的垂直距离连线,将这些连线抽象成为连杆,即得到图1(c)。其中各参数实际取值如表1所示。

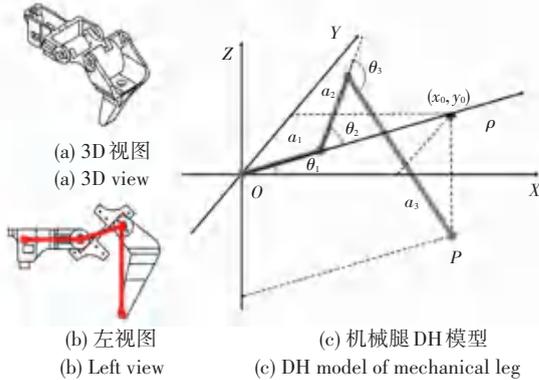


图1 三自由度机器人实物抽象模型

Fig. 1 Three-degree-of-freedom-robot-leg model

表1 三自由度机械腿变量声明

Tab. 1 Variables of three-degree-of-freedom-robot-leg

$\theta_n / ^\circ$	d_n / mm	a_n / mm	$\alpha_n / (^\circ)$
可变化	0	60.50	0
可变化	0	47.89	90
可变化	0	95.00	0

对应这一情形,计算化简之后得到方程(1):

$$\begin{cases} x = p_x = (a_1 + a_2 \cos(\theta_2) + a_3 \cos(\theta_3 - \theta_2)) \cos(\theta_1); \\ y = p_y = x \tan(\theta_1); \\ z = p_z = a_2 \sin(\theta_2) - a_3 \sin(\theta_3 - \theta_2). \end{cases} \quad (1)$$

为简化计算,模型方程被转化为圆柱坐标,如图2所示。

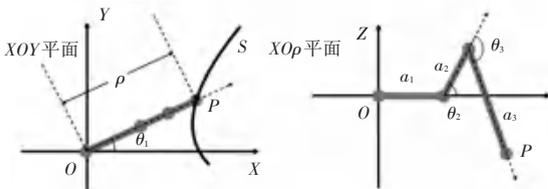


图2 直角坐标变换到柱坐标

Fig. 2 Rectangular coordinate to polar coordinate

$$\theta_2 = \arcsin \frac{a_2 + a_3 \cos(\theta_3) \pm \sqrt{(-2z(a_2 + a_3 \cos(\theta_3)))^2 - 4((a_2 + a_3 \cos(\theta_3))^2 + a_3^2 \sin^2(\theta_3))(z^2 - a_3^2 \sin^2(\theta_3))}}{2((a_2 + a_3 \cos(\theta_3))^2 + a_3^2 \sin^2(\theta_3))} \quad (6)$$

θ_2 表达式简记为: $\theta_2 = f(\theta_3, z)$, 联立式(3) ~ (6) 可得到迭代式(7):

其中,

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = x / \cos(\theta_1) = a_1 + a_2 \cos(\theta_2) + a_3 \cos(\theta_3 - \theta_2); \\ \theta_1 = \arctan(y/x). \end{cases} \quad (2)$$

方程组变化为如式(3):

$$\begin{cases} \rho = a_1 + a_2 \cos(\theta_2) + a_3 \cos(\theta_3 - \theta_2); \\ z = a_2 \sin(\theta_2) - a_3 \sin(\theta_3 - \theta_2). \end{cases} \quad (3)$$

2 方程求解

为了控制终端到达任意位置 (x_0, y_0, z_0) , 必须通过该位置求解方程得到各个关节应当输出的角度。由于不存在解析解, 本文提出迭代法进行求解。

2.1 迭代法求解

因为 $y = f(x)$, 故以下只用讨论 x 与 z 的关系。

为了让末端点 P 沿曲线 S 运动, 在曲线 S 上取得点 (x_0, y_0, z_0) , 求取一组 ρ 以及 θ_1 , 再在 $ZO\rho$ 平面上迭代, 分别求解出一组 θ_2, θ_3 , 重复这一过程, 即可得到向量组 $\Theta_i(\theta_{1i}, \theta_{2i}, \theta_{3i})^T$, 使得末端点 P 运动轨迹拟合于曲线 S 。

为了方便计算, 令 $k = 3$, 利用 θ_3 控制 ρ 的变化, 并修正由 θ_2 变化带来的偏差 $\Delta\rho$, 由 $\rho = a_1 + a_2 \cos(\theta_2) + a_3 \cos(\theta_3 - \theta_2)$ 可以直接分解得

$$\theta_3 = \theta_2 + \arccos \frac{\rho - a_1 - a_2 \cos(\theta_2)}{a_3} \quad (4)$$

简记为 $\theta_3 = g(\theta_2, \theta_1, \rho)$ 。

利用 θ_2 控制 z 的变化, 并修正由 θ_3 变化带来的偏差 Δz , 由 $z = a_2 \sin(\theta_2) - a_3 \sin(\theta_3 - \theta_2)$ 变换可得到关于 $\sin(\theta_2)$ 的一元二次方程, 从而可以求解出 θ_2 。

其中该一元二次方程相关参数如式(5)所示。

$$\begin{cases} a = ((a_2 + a_3 \cos(\theta_3))^2 + a_3^2 \sin^2(\theta_3)); \\ b = -2z(a_2 + a_3 \cos(\theta_3)); \\ c = z^2 - a_3^2 \sin^2(\theta_3). \end{cases} \quad (5)$$

由一元二次方程求根公式可得求解 $\sin(\theta_2)$, 利用反三角函数求解出 θ_2 , 公式(6):

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}^{(0)} &= \rho_0 = \sqrt{y_0^2 - x_0^2}; \\
 \dot{z}^{(0)} &= z_0; \\
 \dot{\theta}_1^{(0)} &= \theta_1 = \arctan \frac{a_2 \ddot{\theta}_2}{a_3 \ddot{\theta}_3}; \\
 \dot{\theta}_2^{(0)} &= \theta_{2\min}; \\
 \dot{\theta}_3^{(0)} &= \theta_{3\min}; \\
 \dot{\theta}_2^{(n)} &= f(\theta_3^{(n)}, z^{(n)}); \\
 \dot{\theta}_3^{(n+1)} &= g(\theta_2^{(n)}, \theta_1^{(0)}, \rho^{(n)}); \\
 \dot{\rho}^{(n+1)} &= a_1 + a_2 \cos(\theta_2^{(n)}) + a_3 \cos(\theta_3^{(n)} - \theta_2^{(n)}); \\
 \dot{z}^{(n+1)} &= a_2 \sin(\theta_2^{(n)}) - a_3 \sin(\theta_3^{(n)} - \theta_2^{(n)}).
 \end{aligned} \tag{7}$$

其中, $\theta_2^{(n)}$ 右上角 (n) 表示迭代次数, 右下角为变量角标, θ 为变量名。循环结束条件为 $(\rho^{(n+1)} - \rho_0)^2 + (z^{(n+1)} - z_0)^2 < Error_{\max}^2$, 其中 $Error_{\max}$ 为最大允许误差。

2.2 迭代收敛证明

该迭代方法敛散性直接影响到是否能得到最后的结果, 这里需要证明, 随着 θ_2, θ_3 的增加 (θ_2, θ_3 的初值是其最小值, 所以经过迭代只会逐渐增加), P 能否从 $ZO\rho$ 平面上初始位置 (ρ^*, z^*) 收敛到 $ZO\rho$ 平面上目标位置 (ρ_0, z_0) 。

因为求解方程 $z^{(n)} = z_0$ 可以得到准确的 $\theta_2^{(n)}$, 但是会使得之前重合的 $\rho(\theta_2^{(n-1)}, \theta_3^{(n-1)}) = \rho_0$ 出现新的偏差, 即 $\rho(\theta_2^{(n)}, \theta_3^{(n-1)}) = \rho_0 + \Delta\rho$, 可以看出, 由于系统存在耦合性, 每次使得求解 $z^{(n)} = z_0$, 得到 $\theta_2^{(n)}$ 时, 都会不断产生偏差 $\Delta\rho > 0$ 。为了使得 Δx 绝对值减小, 只有在 $\Delta\rho = \rho(\theta_2^{(n)}, \theta_3^{(n-1)}) - \rho_0$ 是关于 $\theta_2^{(n)}$ 的减函数时, 迭代才会使得 $\rho(\theta_2, \theta_3)$ 收敛于

ρ_0 。由于 ρ_0 为常数, 所以求证关于 ρ 的迭代收敛, 可转换为求证 $\rho(\theta_2, \theta_3)$ 是关于 θ_2 的减函数。

因为求解方程 $\rho^{(n)} = \rho_0$ 可以得到准确的 $\theta_3^{(n)}$, 但是会使得之前重合的 $z(\theta_2^{(n-1)}, \theta_3^{(n-1)}) = z_0$ 出现新的偏差, 即 $z(\theta_2^{(n-1)}, \theta_3^{(n)}) = z_0 + \Delta z$, 同理每次使得求解 $\rho^{(n)} = \rho_0$, 得到 $\theta_3^{(n)}$ 时, 都会不断产生偏差 $\Delta z < 0$ 。为了使得 Δz 绝对值减小, 只有在 $\Delta z = z(\theta_2^{(n-1)}, \theta_3^{(n)}) - z_0$ 是关于 $\theta_3^{(n)}$ 的增函数时, 迭代才会使得 $z(\theta_2, \theta_3)$ 收敛于 z_0 。由于 z_0 为常数, 所以求证关于 z 的迭代收敛, 可转换为求证 $z(\theta_2, \theta_3)$ 是关于 θ_3 的增函数。

再次强调, 因为 $\rho(\theta_3)$ 的偏差是修正 $z(\theta_2)$ 带来的, 所以 $\Delta\rho$ 的自变量是 θ_2 ; $z(\theta_2)$ 的偏差是修正 $\rho(\theta_3)$ 带来的, 所以 Δz 的自变量分别是 θ_3 , 这里二者自变量会互换。通过分别对其相关变量求解偏导数, 见公式 (8), 可以判断这两个函数的增减性。

$$\begin{aligned}
 \dot{\frac{\partial \rho}{\partial \theta_2}} &= -a_2 \sin(\theta_2) - a_3 \sin(\theta_3 - \theta_2); \\
 \dot{\frac{\partial z}{\partial \theta_3}} &= a_3 \cos(\theta_3 - \theta_2).
 \end{aligned} \tag{8}$$

从中可以得到这样的结论: 由于 $\theta_2 \in (-\pi/6, \pi/2)$, $\theta_3 \in (0, 5\pi/6)$, 并且 $(\theta_3 - \theta_2) \in [0, \pi/2]$ 使得 $\frac{\partial \rho}{\partial \theta_2} < 0, \frac{\partial z}{\partial \theta_3} > 0$, 由此可以证明 $\rho(\theta_2, \theta_3)$ 是关于 θ_2 的减函数, $z(\theta_2, \theta_3)$ 是关于 θ_3 的增函数, 所以该迭代方法必然收敛。

2.3 对任意点的迭代

由于机械腿的运动范围是有限的, 这意味着迭代存在一个可行域, 超过可行域迭代必然无法收敛, 下面着重讨论迭代的可行域

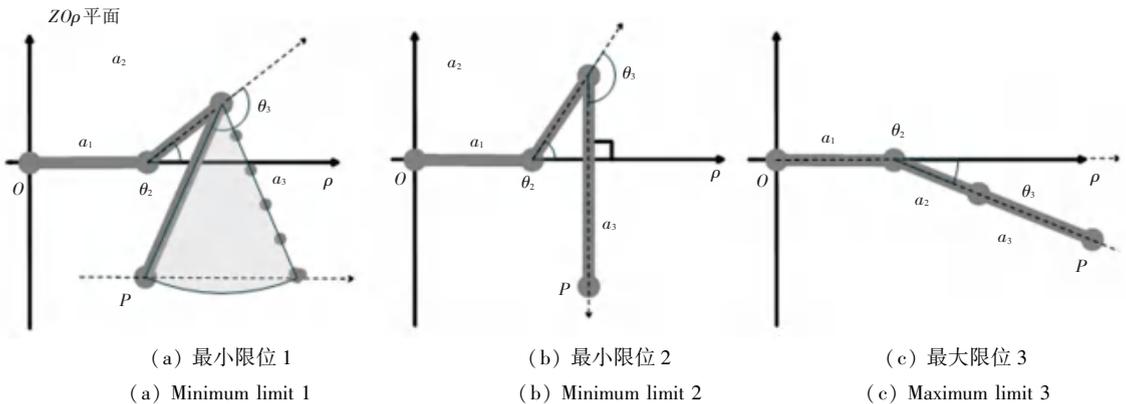


图 3 可行域边界条件示意图

Fig. 3 Boundary condition of feasible region

先要求取 ρ_{\min} , 由图 3(a) 可以看出随着 θ_2 继续减小, ρ_{\min} 将进一步减小, 但是由阴影部分可看出,

这种方法会导致在恒定高度不变的情况下, P 点无法在 z_0 平面内连续移动, 这样会导致支撑面减小, 影

响机器人站立的稳定性,所以这里采用图 3(b) 的方式来求解 ρ_{\min} 。如图 3(b) 所示 a_3 垂直于水平面, 这时有 $(\theta_3 - \theta_2) = \pi/2$, ρ_{\min} 的取值与 z 和 θ_2 有关, 关系式为(9) 和(10):

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{z + a_3}{a_2}\right), \frac{z + a_3}{a_2} \in [-1, 1]; \quad (9)$$

$$\rho_{\min} = a_1 + a_2 \cos(\theta_2).$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2}, \frac{z + a_3}{a_2} > 1; \quad (10)$$

$$\rho_{\min} = a_1 + \sqrt{a_3^2 - (z - a_2)^2}.$$

由图 3(c) 所示, 当 $\theta_3 = 0$, 可以得出 ρ_{\max} , 关系表达式(11)

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{z}{a_2 + a_3}\right); \quad (11)$$

$$\rho_{\max} = a_1 + (a_2 + a_3) \cos(\theta_2).$$

可以看出 ρ_{\min} 与 ρ_{\max} 都是关于 z 的函数, 由此得出 3 条位于 $ZO\rho$ 包络线, 在两条包络线之间就是末端点 P 可以运动的范围。当 $(z + a_3)/a_2 \in [-1, 1]$ 时, ρ_{\min} 曲线为 $\rho_{\min} = a_1 + a_2 \cos(\theta_2)$, 如图 4 中曲线

(a) 所示。当 $(z + a_3)/a_2 > 1$ 时反正弦函数不再为实数, 所以在 $z > 47.11$ 时, $\theta_2 = \arcsin((z + a_3)/a_2)$ 不再适用, 这时令 $\theta_2 = \pi/2$, ρ_{\min} 曲线是以 (a_3, a_2) 为圆心 a_3 半径的圆弧, 如图 4 中曲线(b)。图 4 中曲线(c) 为可行域最大边界的包络线。

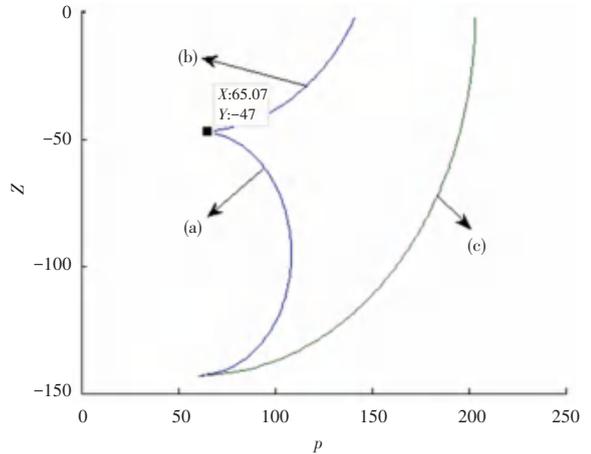


图 4 可行域边界曲线示意图

Fig. 4 Curves of feasible region

以空间内一点 $(120, 0, -50)$ 为例, 进行 24 次迭代后, 各个参数变化如图 5 所示。

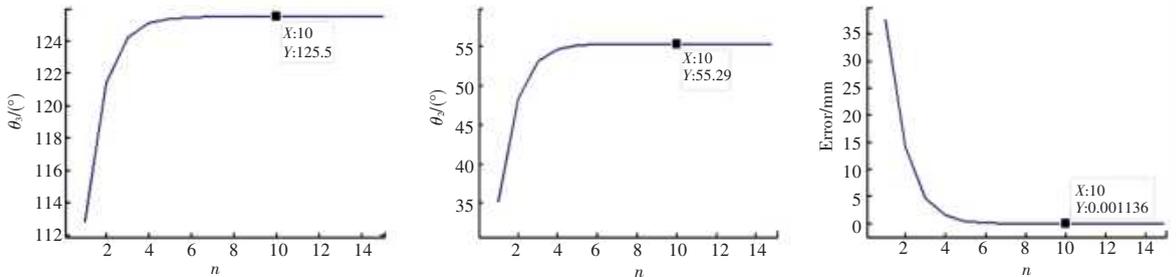


图 5 单一点迭代各参数收敛情况

Fig. 5 Iterative convergence issue of single point

如图 5 所示, 截取了前 15 次迭代的结果, 从中可以看到, 在第十次的时候就已经达到了实际应用的标准。经过 10 次迭代, θ_3 收敛于 125.5° , θ_2 收敛于 55.29° , 二者之差为 $70.21^\circ < 90^\circ$, 末端位置坐标与期望坐标误差收敛于 0.001136 mm 。24 次迭代完成后 x 收敛于 $120 + 5.89 \times 10^{-11} \text{ mm}$, y 收敛于 0.0 mm , z 收敛于 $-50 - 2.1245 \times 10^{-11} \text{ mm}$, 与期望坐标 $(120, 0, -50)$ 接近。

迭代过程如图 6 所示, 可以看出当对准 z 轴时会使得 ρ 产生偏差 $\Delta\rho$, 并且 $\Delta\rho$ 随着迭代的进行绝对值在逐渐减小, 当对准 ρ 轴时会使得 z 产生偏差 Δz , 并且 Δz 随着迭代的进行绝对值也在逐渐减小。可以看出迭代收敛的范围, 并不在目标点附近, 所以该迭代方法对于初值的选取十分为宽松。

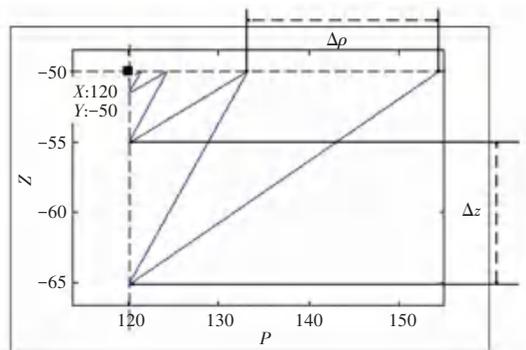


图 6 单一点迭代过程

Fig. 6 Iterative process of single point

为了研究点迭代的效果, 在 $zO\rho$ 平面内, 每一个毫米取一个点, 先保持 z 不变逐行取点, 然后 $z = z + 1$ 再继续取点, 经过迭代, 得到相对应的 (θ_3, θ_2) 集合

共40 000 组数据(其中 7983 组数据误差小于 0.000 1, 为有效数据), 回代到式(1) 中进行验算,

绘制点结果如图 7 所示, 选取四组有代表性的数据如表 2 所示结果。

表 2 多点迭代结果比较

Tab. 2 Comparisons among multiple points

点序号	ρ 期望值	z 期望值	ρ 迭代值	z 迭代值	θ_2 迭代值	θ_3 迭代值	期望误差
9860	120	-50	120.0	-50.0	55.3	125.5	5.0e-11
13039	99	-66	99.0	-66	37.3	127.0	1.4e-14
15058	118	-76	118	-76	22.2	104.2	0
26452	112	-110	112	-111.5	-20.4	65.6	21.5

这里存在一个必然的问题, ρ_{max} 是实际的最大可行域边界, 而 ρ_{min} 是根据实际情况定义出来的最小可行域边界, 这意味着存在 $\rho < \rho_{min}$ (最小值可以到 0 附近, 但是无实际用途), 但是绝对不会出现 $\rho > \rho_{max}$, 当 (ρ, z) 接近最大边界时, 收敛效果会严重下降, 即说明实际可行域内不可能存在这样一个点。所以, 如表 2 所示第 13039 号和 26452 号点均在最大值边界附近, 误差均大于一。其中, 图 7 所示的第 28210 号数据(在哪里?), 由于同时靠近最大值和最小值边界, 误差达到最大的 37.12。对于第 13039 号点, 尽管在最小边界附近, 结果与期望的误差接近于零, 在可行域内的第 9860 和 15085 号点, 误差在允许范围内。从 28217 号数据到第 40000 号均为无效数据, 由于未被录入且初值为零, 所以各项数据均为零。

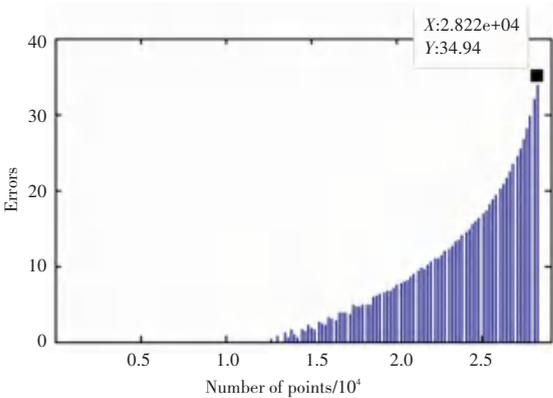


图 7 多点迭代误差情况

Fig. 7 Iterative error of multiple points

迭代点序数与误差关系如图 7 所示, 其中有明显误差的均为接近最大可行域范围的数值, 由于序号越大, 可行域越小, 误差也逐渐增大。

以上是针对三关节机械臂进行求解的分析过程, 对于多关节机械腿, 该方法依然适用, 其运动学正模型如式(12)所示。

$$\begin{aligned}
 x &= (a_1 + \sum_{i=2}^{k-1} a_i \cos(\sum_{j=2}^i \theta_j) + \sum_{i=k}^n a_i \cos(\theta_k + \sum_{j=2}^{j \neq k} \theta_j)) \cos(\theta_1); \\
 y &= x \tan(\theta_1); \\
 z &= \sum_{i=2}^{m-1} a_i \sin(\sum_{j=2}^i \theta_j) + \sum_{i=m}^n a_i \sin(\theta_m + \sum_{j=2}^{j \neq k} \theta_j), \\
 m &\neq k.
 \end{aligned} \tag{12}$$

可转化为式(13):

$$\begin{aligned}
 (B_2^2 + B_3^2) \sin^2(\theta_k) + 2B_1 B_2 \sin(\theta_k) + (B_1^2 - B_3^2) &= 0; \\
 (C_3^2 + C_2^2) \sin^2(\theta_m) + 2C_1 C_3 \sin(\theta_m) + (C_1^2 - C_2^2) &= 0; \\
 \theta_1 &= \arctan \frac{ay}{ax}, \quad m \neq k.
 \end{aligned} \tag{13}$$

其中, 系数 $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ 如式(14)所示:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{x}{\cos(\theta_1)} - a_1 - \sum_{i=2}^{k-1} a_i \cos(\sum_{j=2}^i \theta_j); \\
 B_2 &= \sum_{i=k}^n a_i \sin(\sum_{j=2}^{j \neq k} \theta_j); \\
 B_3 &= \sum_{i=k}^n a_i \cos(\sum_{j=2}^{j \neq k} \theta_j); \\
 C_1 &= z - \sum_{i=2}^{m-1} a_i \sin(\sum_{j=2}^i \theta_j); \\
 C_2 &= \sum_{i=m}^n a_i \sin(\sum_{j=2}^{j \neq k} \theta_j); \\
 C_3 &= \sum_{i=m}^n a_i \cos(\sum_{j=2}^{j \neq k} \theta_j).
 \end{aligned} \tag{14}$$