田吉, 龙飞. 具有扰动的正切换齐次系统的多项式稳定性[J]. 智能计算机与应用,2025,15(1):10-17. DOI:10. 20169/j. issn. 2095-2163. 250102

具有扰动的正切换齐次系统的多项式稳定性

田 吉[1,2], 龙 飞[3]

(1 贵州大学 电气工程学院,贵州 贵阳 550025; 2 贵州中医药大学时珍学院 信息工程学部,贵州 修文 550200;
3 贵州理工学院 人工智能与电气工程学院, 贵阳 550003)

摘 要: 本文研究了具有有界外源输入的正切换齐次非线性系统的多项式稳定性,在平均停留时间切换条件下,讨论了向量场为 $0< q < 1$ 阶齐次且具有协同性的连续时间正切换非线性系统;利用不同于通常的 Lyapunov 函数,建立了系统在平均停留时间切换下的显式多项式稳定性判据;利用时变函数的性质将切换非线性系统的主要结论推广到了更为一般的切换非线性时变系统;最后给出了两个数值算例,验证了所得结果的有效性。

关键词: 正切换非线性系统; 多项式稳定性; 外源输入; 对数收缩平均停留时间

中图分类号: O175 **文献标志码**: A **文章编号**: 2095-2163(2025)01-0010-08

Polynomial stability of positive switching homogeneous systems with perturbations

TIAN Ji[1,2], LONG Fei[3]

(1 School of Electrical Engineering, Guizhou University, Guiyang 550025, China; 2 Faculty of Information Engineering, Shizhen College of Guizhou University of Traditional Chinese Medicine, Xiuwen 550200, Guizhou, China; 3 School of Artificial Intelligence and Electrical Engineering, Guizhou Institute of Technology, Guiyang 550003, China)

Abstract: This paper investigates the polynomial stability of positively switching homogeneous nonlinear systems with bounded external inputs. Under the condition of average residence time switching, continuous time positively switching nonlinear systems with vector fields of $0 < q < 1$ homogeneous and synergistic are discussed; An explicit polynomial stability criterion for the system under average residence time switching was established using a Lyapunov function different from the usual one; The main conclusion of switching nonlinear systems is extended to more general switching nonlinear time-varying systems by utilizing the properties of time-varying functions. Finally, two numerical examples were provided to verify the effectiveness of the obtained results.

Key words: forward switching system; polynomial stability; external input, homogeneous collaborative system

0 引 言

正系统是当初始状态为非负时,其状态始终保持非负的动力学系统[1]。正系统经常出现在许多重要的应用中,如涉及化学反应器的工业过程,状态变量表示概率的随机模型[2],以及多智能体系统。

近年来,正系统的分析引起了人们的极大关注。许多重要的正系统都是非线性的,正非线性系统的稳定性理论得到了广泛的研究,齐次协作系统属于一类特殊的正非线性系统[2-3]。对于齐次协作系统的稳定性,Feyzma 等[4]研究了具有有界时变时滞的一次齐次协作系统的指数稳定性,并将结果推广到了更一般的齐次合作系统中;Zhu 等[5]利用最大可分离 Lyapunov 函数(MSLF)方法,给出了切换齐次正非线性系统实际稳定的充分条件;Dong[6]讨论了具有时变时滞的任意阶齐次正系统的衰减率。

正切换系统是一类特殊的正系统,由一系列不同的子系统组成,用微分或差分方程表示,这些子系统遵循一定的切换规则,在一定的时间内选择其中一个活动。切换系统可以描述传统连续时间或离散时间系统所没有的一些动力学行为和现象。由于切换系统在通信网络、电力系统控制、目标跟踪等各个

基金项目: 国家自然科学基金(61813006,61973329); 贵州省基础研究计划重点项目(20191416); 贵州省高等学校科研创新团队(2022033)。

作者简介: 田 吉(1997—),男,硕士研究生,主要研究方向:分数阶切换系统。

通信作者: 龙 飞(1973—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向:混杂系统,非线性系统控制。Email: feilong@ git. edu. cn。

收稿日期: 2023-09-06

领域的广泛应用，近年来受到了控制界和实际工程界的广泛关注[7-8]。稳定性是正切换系统的最重要的性质之一，Zhu 等[9]放宽了各子系统仅为 Lyapunov 稳定的一些约束，基于 MSLF 方法建立了一次 SHPNSs 的指数稳定性判据；Sun 等[10]引入一类特殊开关信号和 MSLF 技术，解决了大于一次 SHPNSs 的多项式稳定性问题；此外，Zhang 等[11]通过比较原理解决了具有离散和分布延迟的时变切换非线性系统的指数稳定性问题。另一方面，当切换信号受到约束时，通常采用平均停留时间（ADT）或模式相关的平均停留时间来研究正切换线性系统的稳定性问题[12]。相对而言，正切换非线性系统的稳定性问题受到的关注较少，Ju 等[13]研究了正切换非线性系统的稳定性，其中每个子系统都是一次齐次的。

在实际应用中，一些正系统可能具有非负外源输入，如电力系统中的外部电压，外生输入的存在会导致系统不稳定[14]。在这种情况下，系统的所有状态轨迹都汇聚在一个特殊的球内，这类问题通常称为状态边界问题。线性系统的状态边界问题也得到了广泛的研究，如 Fan 等[15]利用最大可分离李雅普诺夫函数方法和 ADT 切换方法，给出了带有不稳定子系统的正切换系统非线性系统的稳定性结论；Shen 等[16]通过利用 Metzler 矩阵的一些结果，给出了一种新方法，用于估计具有延迟和有界扰动的时变线性系统上的极限状态边界。在现有的大部分工作中，所涉及的系统主要是线性系统，并且大多采用 Lyapunov 泛函方法。最近，Trinh 等[17]首次研究了具有时滞和有界扰动的线性时变系统的状态边界问题，利用一种不涉及 Lyapunov 泛函方法，导出了系统状态边界的显式延迟无关条件。因此，具有外源输入的切换齐次正非线性系统的稳定性和控制问题具有重要的理论价值和实际意义。

众所周知，现实世界中大多数正系统都是非线性的，因此越来越多的研究者开始关注这类系统的研究，Sun 等[10]首次考虑了一类 $q>1$ 阶非线性时变系统的可达集估计；Dong[6]证明了具有时变延迟的任意程度的齐次正系统的衰减率，但不考虑扰动。到目前为止，关于非线性正切换系统稳定性的研究较少受到关注，对于 $0<q<1$ 阶齐次非线性正切换系统的多项式稳定性问题，还没有得到任何结果。本文采用了一种不同于传统 Lyapunov 函数的方法和对数收缩平均停留时间（LCAD，Logarithm Contraction Average Dwell-time Method）方法，建立了阶数为 $0<q<1$ 的正齐次非线性系统的多项式稳定性准则。此外，本文还将得到的切换非线性系统的稳定性结果推广到了更一般的切换非线性系统中，并得到了其多项式稳定的结论。

1　问题陈述和初步说明

$\mathbf{R}$、N 和 N_0 分别表示实数、自然数和包括 0 的自然数的集合；$\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 分别表示 n 维向量和实元素矩阵的空间；x_i 表示当 $i\in\langle n\rangle=\{1,2,\cdots,n\}$ 时 $x\in\mathbb{R}^n$ 的第 i 个坐标，对于向量 $x=(x_i)\in\mathbb{R}^n$ 和 $y=(y_i)\in\mathbb{R}^n$，如果 $x_i\geqslant y_i(x_i\leqslant y_i)$，则有 $x\geqslant y(x\leqslant y)$，如果 $x_i<y_i(x_i>y_i)$，则 $x<y(x>y)$，其中 $i\in\langle n\rangle$ · $\mathbb{R}^n_+=\{x\geqslant 0 \mid x\in\mathbb{R}^n\}$。对于 $x\in\mathbb{R}^n$，表示 $|x|=(|x_i|)\in\mathbb{R}^n_+$，$\|x\|_\infty=\max\limits_{i\in\langle n\rangle}|x_i|$，给定一个 n 维向量 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{v}>0$，则 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$ 的加权 l_∞ 范数表示为 $\|x\|^v_\infty=\max\limits_{i\in\langle n\rangle}\dfrac{|x_i|}{v_i}$。

本文考虑下式具有外生输入的连续时间正切换非线性系统：

$$\dot{x}(t)=f_{\sigma(t)}(x(t))+\omega(t),\ t\geqslant 0 \tag{1}$$

其中，$x(t)\in\mathbb{R}^n$ 表示系统的状态向量；切换信号 $\sigma(t):[0,+\infty)\mapsto\langle M\rangle=\{1,2,\cdots,M\}$ 是一个分段的右连续函数，M 是子系统的数量；$f_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，$p\in\langle M\rangle$ 为 $f(0)=0$ 的矢量场；$\boldsymbol{\omega}(t):[,\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是外生输入向量。切换次数表示为 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k<t_{k+1}<\cdots$，当 $t\in[t_k,t_{k+1})$ 时，$\boldsymbol{\sigma}(t_k)$ 子系统是活动的。

定义 1[18]　一个连续向量函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上是连续可微的。如果雅可比矩阵（Jacobian matrix）$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x)$ 是 Metzler，$x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$，则向量函数 f 被认为是协同的，对于任意 $x,y\in\mathbb{R}^n_+$，如果 $f(x)\geqslant f(y)$ 且 $x\geqslant y$，则称向量函数 f 在 $\mathbb{R}^n_+$ 上是保序的。

定义 2[19]　如果对于 $x\in\mathbb{R}^n$，且 $\lambda>0$ 有 $f(\lambda x)=\lambda^q f(x)$，则连续向量函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为 $q>0$ 次齐次函数。

定义 3[20] 给定常数 $\beta>0$，如果存在常数 $\tau_\beta>0$，使得：

$$N_{\sigma(t,0)}\leqslant\frac{\ln(1+\beta t)}{\tau_\beta},\ \forall t\geqslant 0 \tag{2}$$

其中，$N_{\sigma(t,0)}$ 表示在区间(0,t)内发生的切换次数，且切换信号 σ 具有对数收缩平均停留时间（LCAD）τ_β。

定义 4[21] 给定一个切换信号,如果对于任意初始状态 $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$, 存在常数 $a > 0, b > 0$ 和 $\gamma > 0$, 使得系统(1)的状态轨迹满足下式:

$$\| x(t) \| \leqslant (a + bt)^{-\gamma},\ t \geqslant 0 \tag{3}$$

则系统(1)是多项式稳定的, 其中 $\| x(t) \|$ 是 $x \in \mathbb{R}^n_+$, 的范数。

2 稳定性分析

本文给出了具有非负有界输入的 $q > 0$ 阶连续时间正切换齐次系统的多项式稳定性的充分条件。除非另有说明,否则在后文的证明过程中都有 $i \in \langle n \rangle$。对于具有外源输入的一阶连续时间齐次正切换非线性系统,向量函数 $f_p(p \in \langle m \rangle)$ 需满足假设1:

假设1 对于每一个函数$f_p(p \in \langle m \rangle)$是$q > 0$次齐次协作的。

假设当 $t \geqslant 0$ 时, $\omega(t) \geqslant 0$, 且假设1成立。如果系统(1)的状态在 $[0, \infty)$ 上对于任何初始函数 $\varphi \geqslant 0$ 和任意切换下是非负,则系统(1)是正系统。

根据假设1和定义3,可得系统(1)的多项式稳定性定理。

定理1 对于满足假设1的系统(1),如果存在一类向量 $\{v_p \in \mathbb{R}^n | v_p, p \in \langle M \rangle\}$ 使得$f_p(v_p) < 0$, $p \in \langle M \rangle$, $\varepsilon_0 = \left(\dfrac{\bar{\omega}}{-\max\limits_{i \in \langle n \rangle, p \in \langle m \rangle} f_{pi}(v_p)} \right)^{\frac{1}{q}}$, $\varphi_0 = \max\{ \| x(0) \|_\infty^{v_{p_0}}, \varepsilon_0 \}$, $\beta = \xi(q-1)$, $\mu = \max\limits_{p, b \in \langle M \rangle, i \in \langle n \rangle} \dfrac{v_{pi}}{v_{bi}}$, $\tau_\beta > q \ln \mu$, $\xi = \min\limits_{p \in \langle M \rangle, i \in \langle n \rangle} \xi_{pi}$。

其中, ε_0 为 $\dfrac{x_i(t)}{v_{\sigma(t)i}}$ 的上确界, φ_0 为初始函数, μ 表示切换函数值, τ_β 是对数收缩平均停留时间(LCAD), ξ_{pi} 是满足下式的唯一正解:

$$\frac{f_{pi}(v_p)}{v_{pi}} + \xi_{pi} = 0 \tag{4}$$

则对于任意的初始条件 $x(0) \geqslant 0$ 和任意 $\omega(t) \geqslant 0$ 满足 $\| \omega(t) \|_\infty \leqslant \bar{\omega}$, 系统(1)在对数收缩平均停留时间(LCAD)切换下是多项式稳定的。

证明 将证明分为两个步骤

步骤1 对于 $\eta > 1$, 当 $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in N_0$ 时,设 $\sigma(t_k) = p_k \in \langle M \rangle$, 推导可得下式:

$$\frac{x_i(t)}{v_{\sigma(t_k)i}} \leqslant \mu^k \{ (\eta\varepsilon_0)^q + [(\eta(\varphi_0 - \varepsilon_0))^{1-q} + (q - 1)\xi(t - t_0)]^{-\frac{q}{q-1}} \}^{\frac{1}{q}} \tag{5}$$

首先证明,对于 $t \in [t_0, t_1)$, 有下式成立:

$$\frac{x_i(t)}{v_{\sigma(t_0)i}} \leqslant \{ (\eta\varepsilon_0)^q + [(\eta(\varphi_0 - \varepsilon_0))^{1-q} + (q - 1)\xi(t - t_0)]^{-\frac{q}{q-1}} \}^{\frac{1}{q}} \tag{6}$$

令

$$z_i(t) = \frac{x_i(t)}{v_{p_0 i}} - \{ (\eta\varepsilon_0)^q + [(\eta(\varphi_0 - \varepsilon_0))^{1-q} + (q - 1)\xi(t - t_0)]^{-\frac{q}{q-1}} \}^{\frac{1}{q}} \tag{7}$$

当 $t = t_0$ 时:

$$z_i(t_0) = \frac{x_i(t_0)}{v_{pi}} - \eta(\varepsilon_0^q + (\varphi_0 - \varepsilon_0)^q)^{\frac{1}{q}} \tag{8}$$

通过利用基本不等式 $(a + b)^\alpha \geqslant a^\alpha + b^\alpha$, 其中 $a, b > 0$ 和 $\alpha > 1$, 可以得到下式:

$$z_i(t_0) \leqslant \frac{x_i(t_0)}{v_{p_0 i}} - \eta\varphi_0 \tag{9}$$

显然对于 $i \in \langle n \rangle$ 有 $z_i(t_0) < 0$, 接下来将证明 $z_i(t) < 0$, 其中 $i \in \langle n \rangle$ 和 $t \in [t_0, t_1)$, 若不满足 $z_i(t) < 0$, 则存在一个索引 $m_1 \in \langle n \rangle$ 和 $t^* \in (t_0, t_1)$ 使得 $z_i(t) < 0 (i \in \langle n \rangle)$, 继而可得当 $t \in [t_0, t^*)$ 时,有 $z_{m_1}(t^*) = 0$ 且 $\dot{z}_{m_1}(t^*) \geqslant 0$。

根据 $z_i(t)$ 的定义,得到下式成立:

$$\frac{x_i(t^*)}{v_{p_0 i}} \leqslant \{ (\eta\varepsilon_0)^q + [(\eta(\varphi_0 - \varepsilon_0))^{1-q} + (q - 1)\xi(t^* - t_0)]^{-\frac{q}{q-1}} \}^{\frac{1}{q}} \tag{10}$$

$$\frac{x_{m_1}(t^*)}{v_{p_0 m_1}} = \{ (\eta\varepsilon_0)^q + [(\eta(\varphi_0 - \varepsilon_0))^{1-q} + (q - 1)\xi(t^* - t_0)]^{-\frac{q}{q-1}} \}^{\frac{1}{q}} \tag{11}$$

利用f_p的同构性、定义1和定义2,可以得到下式:

$$\begin{aligned} f_{p_0 m_1}(x(t^*)) &\leqslant f_{p_0 m_1}(\{ (\eta\varepsilon_0)^q + [(\eta(\varphi_0 - \varepsilon_0))^{1-q} + (q - 1)\xi(t^* - t_0)]^{-\frac{q}{q-1}} \}^{\frac{1}{q}} v_{p_0}) = \\ &\{ (\eta\varepsilon_0)^q + [(\eta(\varphi_0 - \varepsilon_0))^{1-q} + (q - 1)\xi(t^* - t_0)]^{-\frac{q}{q-1}} \}^{\frac{1}{q}} f_{p_0 m_1}(v_{p_0}) = (\eta\varepsilon_0)^q f_{p_0 m_1}(v_{p_0}) + \\ &[(\eta(\varphi_0 - \varepsilon_0))^{1-q} + (q - 1)\xi(t^* - t_0)]^{-\frac{q}{q-1}} f_{p_0 m_1}(v_{p_0}) \end{aligned} \tag{12}$$

设

$L(t) = \{ (\eta\varepsilon_0)^q + [(\eta(\varphi_0 - \varepsilon_0))^{1-q} + (q -$

$$1)\xi(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}} \tag{13}$$

由式(7)和式(13)，可得下式：

$$\dot{z}_{m_1}(t^*)=\frac{\dot{x}_{m_1}(t^*)}{v_{p_0m_1}}-\dot{L}(t^*) \tag{14}$$

其中，

$$\dot{L}(t^*)=-\xi[(\eta(\varphi_0-\varepsilon_0))^{1-q}+(q-1)\xi(t^*-t_0)]^{\frac{-q}{q-1}} \tag{15}$$

由式(1)、式(14)和式(15)可进一步得到下式：

$$\dot{z}_{m_1}(t^*)=\frac{\dot{x}_{m_1}(t^*)}{v_{p_0m_1}}-\dot{L}(t^*)\leqslant\frac{\dot{x}_{m_1}(t^*)}{v_{p_0m_1}}+\xi[(\eta(\varphi_0-\varepsilon_0))^{1-q}+(q-1)\xi(t^*-t_0)]^{\frac{-q}{q-1}}\leqslant\frac{f_{p_0m_1}(x(t^*))+\omega_{m_1}(t^*)}{v_{p_0m_1}}+\xi[(\eta(\varphi_0-\varepsilon_0))^{1-q}+(q-1)\xi(t^*-t_0)]^{\frac{-q}{q-1}} \tag{16}$$

然后，从式(12)和式(16)得出结论如下式：

$$\dot{z}_{m_1}(t^*)\leqslant\frac{1}{v_{p_0m_1}}[(\eta\varepsilon_0)^q f_{p_0m_1}(v_{p_0})+\bar{\omega}]+[(\eta(\varphi_0-\varepsilon_0))^{1-q}+(q-1)\xi(t^*-t_0)]^{\frac{-q}{q-1}}[\xi+\frac{f_{p_0m_1}(v_{p_0})}{v_{p_0m_1}}] \tag{17}$$

由于 $\eta>1$，基于 ε_0 和 ξ 的定义，因此可得下式成立。

$$(\eta\varepsilon_0)^q f_{p_0m_1}(v_{p_0})+\bar{\omega}<\varepsilon_0^q f_{p_0m_1}(v_{p_0})+\bar{\omega}\leqslant 0 \tag{18}$$

$$\frac{f_{p_0m_1}(v_p)}{v_{p_0m_1}}+\xi\leqslant 0 \tag{19}$$

结合式(17)，可得到 $\dot{z}_{m_1}(t^*)<0$，这与式(10)相矛盾。因此，对于 $t\in[t_0,t_1)$，有 $z_i(t)<0(i\in\langle n\rangle)$，即对于任意的 $\eta>1$，有 $\frac{x_i(t)}{v_{p_0i}}<\{(\eta\varepsilon_0)^q+[(\eta(\varphi_0-\varepsilon_0))^{1-q}+(q-1)\xi(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}}$，$t\in[t_0,t_1)$，$i\in\langle n\rangle$。

当(17)中的 η 趋向于 1 时，则意味着下式成立

$$\frac{x_i(t)}{v_{p_0i}}\leqslant\{\varepsilon_0^q+[(\varphi_0-\varepsilon_0)^{1-q}+(q-1)\xi(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}},\ t\in[t_0,t_1),\ i\in\langle n\rangle \tag{20}$$

总之，如果 $\|x(t_0)\|_\infty^{v_{\sigma(t_k)}}\leqslant\varphi_0$，则通过使 η 趋向于 1，得出定理 1 中的条件成立。

步骤 2　基于步骤 1 中的分析，对于任意的 $\eta>1$，可得出定理 1 中的条件在 $t\in[t_r,t_{r+1})$，$r\leqslant l$ 上成立：

$$\frac{x_i(t)}{v_{p_ri}}<\mu^r\{(\eta\varepsilon_0)^q+[(\eta(\varphi_0-\varepsilon_0))^{1-q}+(q-1)\xi(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}} \tag{21}$$

接下来，将证明 $t\in[t_{l+1},t_{l+2})$ 时，定理 1 中的条件成立。

令

$$z_i(t)=\frac{x_i(t)}{v_{p_{l+1}i}}-\mu^{l+1}\{(\eta\varepsilon_0)^q+[(\eta(\varphi_0-\varepsilon_0))^{1-q}+(q-1)\xi(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}}$$

对于 $t\in[t_{l+1},t_{l+2})$，根据 μ 的定义和不等式(10)，可得：

$$\frac{x_i(t_{l+1})}{v_{p_{l+1}i}}=\frac{v_{p_li}}{v_{p_{l+1}i}}\cdot\frac{x_i(t_{l+1})}{v_{p_li}}\leqslant\mu\frac{x_i(t_{l+1})}{v_{p_li}}\leqslant\mu^{l+1}\{\varepsilon_0^q+[(\varphi_0-\varepsilon_0)^{1-q}+(q-1)\xi(t_{l+1}-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}} \tag{22}$$

从而可得当 $t=t_{l+1}$ 时，有 $z_i(t)\leqslant 0$，接下来证明对于 $t\in[t_{l+1},t_{l+2})$，$z_i(t)\leqslant 0$。若不满足 $z_i(t)<0$，则存在一个索引 $m_2\in\langle n\rangle$ 和 $t^*\in(t_{l+1},t_{l+2})$ 使得 $z_i(t)<0(i\in\langle n\rangle)$，继而可得当 $t\in[t_{l+1},t^*)$ 时，有 $z_{m_2}(t^*)=0$ 且 $\dot{z}_{m_2}(t^*)\geqslant 0$。

从而可得下式：

$$\frac{x_i(t^*)}{v_{p_{l+1}i}}\leqslant\mu^{l+1}\{(\eta\varepsilon_0)^q+[(\eta(\varphi_0-\varepsilon_0))^{1-q}+(q-1)\xi(t^*-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}} \tag{23}$$

$$\frac{x_{m_2}(t^*)}{v_{p_{l+1}m_2}}=\mu^{l+1}\{(\eta\varepsilon_0)^q+[(\eta(\varphi_0-\varepsilon_0))^{1-q}+(q-1)\xi(t^*-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}} \tag{24}$$

因此，可以得到下式成立。

$$f_{p_{l+1}m_2}(x(t^*))\leqslant f_{p_{l+1}m_2}(\mu^{l+1}\{(\eta\varepsilon_0)^q+[(\eta(\varphi_0-\varepsilon_0))^{1-q}+(q-1)\xi(t^*-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}}v_{p_{l+1}})=\{(\eta\varepsilon_0)^q+[(\eta(\varphi_0-\varepsilon_0))^{1-q}+(q-1)\xi(t^*-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}}f_{p_{l+1}m_2}(v_{p_{l+1}})=\mu^{l+1+q}(\eta\varepsilon_0)^q f_{p_{l+1}m_2}(v_{p_{l+1}})+\mu^{l+1+q}[(\eta(\varphi_0-\varepsilon_0))^{1-q}+(q-1)\xi(t^*-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}f_{p_{l+1}m_2}(v_{p_{l+1}}) \tag{25}$$

接下来，利用步骤 1 的方法，由式(1)、式(4)和

式(24)得出 $\dot{z}_{m_2}(t^*) < 0$, 这与式(19)是矛盾的。因此,对于任意 $t \in [t_{l+1}, t_{l+2})$, 则可得下式成立:

$$\frac{x_i(t)}{v_{p_{l+1}i}} \leqslant \mu^{l+1}\{(\eta\varepsilon_0)^q + [(\eta(\varphi_0 - \varepsilon_0))^{1-q} + (q-1)\xi(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}} \tag{26}$$

通过推导,最终证明了对于 $t \in [t_k, t_{k+1}), k \in N_0$, 式子(20)成立,则有下式:

$$\frac{x_i(t)}{v_{p_k i}} \leqslant \mu^{k}\{(\eta\varepsilon_0)^q + [(\eta(\varphi_0 - \varepsilon_0))^{1-q} + (q-1)\xi(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}} \tag{27}$$

当式(15)中的 η 趋向于1时,这意味着下式成立:

$$\frac{x_i(t)}{v_{p_k i}} \leqslant \mu^{k}\{\varepsilon_0^q + [(\varphi_0 - \varepsilon_0)^{1-q} + (q-1)\xi(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}},\ t \in [t_0, t_1) \tag{28}$$

设 $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{\ln\mu}{\tau_\beta}$, 由于 $\tau_\beta > q\ln\mu$, 所以 $\gamma > 0$, 这与式(17)和 LCAD(Logarithm Contraction Average Dwell-time Method)的定义一起表明下式成立。

$$\frac{x_i(t)}{v_{p_k i}} \leqslant \mu^{N_{\sigma(t,0)}}\{\varepsilon_0^q + [(\varphi_0 - \varepsilon_0)^{1-q} + (q-1)\xi(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}} \leqslant e^{\frac{\ln(1+\beta t)}{\tau_\beta}\ln\mu}(1+\beta t)^{\frac{1}{q}} = (1+\beta t)^{-\gamma},\ t \in [t_k, t_{k+1}) \tag{29}$$

其中 β 在定理1中有定义,显然在 LCAD 切换下,系统(1)是多项式稳定的。定理1证明完毕。

给定扰动的界和 q 的值,为了确定向量 $\{v_p \in \mathbb{R}^n \mid v_p > 0, p \in \langle M\rangle\}$, 本文处理非线性优化问题: $\min\sum_{p=1}^{n} v_p^{\mathrm{T}}\pi$ 服从 $f_p(v_p) < 0$ 和 $v_p > 0$, 其中 $\pi = \underbrace{(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}}_{n}$. 一旦确定了 v_p, 可以通过求解 $\frac{f_{pi}(v_p)}{v_{pi}} + \xi_{pi} = 0$, 进一步推导出 ξ_{pi}。

如果定理1中的条件成立,且有 $\mu = 1$, 即 $v_p = v(p \in \langle M\rangle)$ 时,可得系统(1)在任意切换下是多项式稳定的。

最后,考虑下式非线性时变切换系统。

$$\dot{x}(t) = F_{\sigma(t)}(t, x(t)) + \omega(t),\ t \geqslant 0 \tag{30}$$

其中, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 表示系统的状态向量;切换信号 $\sigma(t):[0, +\infty) \mapsto \langle M\rangle = \{1, 2, \cdots, M\}$ 是一个分段的右连续函数, M 是子系统的数量; $\omega(t):[0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ 是外生输入向量;切换次数表示为 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots$。

当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, $\sigma(t_k)$ 子系统是活动的。$F_p(t, x(t)):[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, p \in \langle M\rangle$ 是关于 x 的局部 Lipschtiz 连续函数。

设向量函数 $\boldsymbol{F}_p$ 满足假设2:

假设2 设存在一个 $0 < q < 1$ 次的合作同构向量函数 $f_p:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, p \in \langle M\rangle$ 使得 $F_{pi}(t, x)\mathrm{sign}(x_i) \leqslant f_{pi}(|x|)$ 成立,其中 $t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n, x_i \neq 0 (i \in \langle n\rangle)$。

基于假设2,给出一般非线性切换系统的推广。

定理2 若假设2成立,如果存在一类向量 $\{v_p \in \mathbb{R}^n \mid v_p, p \in \langle M\rangle\}$, 使得

$$f_p(t, v_p) < 0,\ p \in \langle M\rangle,$$

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{|\bar{\omega}|}{-\max\limits_{i\in\langle n\rangle,\ p\in\langle m\rangle} f_{pi}(t, v_p)}\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

$$\varphi_1 = \max\{\|x(0)\|_\infty^{v_{p_0}}, \varepsilon_1\},$$

$$\mu = \max_{p,b\in\langle M\rangle, i\in\langle n\rangle}\frac{v_{pi}}{v_{bi}},\ \tau_\beta > (q-1)\ln\mu,$$

$$\zeta = \min_{p\in\langle M\rangle, i\in\langle n\rangle}\zeta_{pi}$$

其中 ε_1 为 $\frac{|x_i(t)|}{v_{\sigma(t)i}}$ 的上确界, φ_1 为初始函数, μ 和 τ_β 与定理1中的意义相同。ζ_{pi} 是满足下列方程的唯一正解。

$$\frac{f_{pi}(t, v_p)}{v_{pi}} + \zeta_{pi} = 0 \tag{31}$$

则对于任意的初始条件 $x(0) \geqslant 0$ 和任意 $\omega(t) \geqslant 0$ 满足 $\|\omega(t)\|_\infty \leqslant \bar{\omega}$, 则系统(30)在 LCAD 切换下是多项式稳定的。

证明 不失一般性,假设 $\sigma(t) = p_k \in \langle M\rangle$, 对于 $i \in \langle n\rangle$ 和 $t \in [t_k, t_{k+1}), k \in N_0$, 设

$$z_i(t) = \frac{x_i(t)}{v_{p_k i}} - \mu^k\{(\eta\varepsilon_1)^q + [(\eta(\varphi_1 - \varepsilon_1))^{1-q} + (q-1)\zeta(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\}^{\frac{1}{q}}$$

利用 f_p 的同构性、定义1和定义2,则有下式:

$$\dot{z}_i(t) = \frac{D_+|x_i(t)|}{v_{p_k i}} + \zeta\mu^{k+q}[(\eta(\varphi_1 - \varepsilon_1))^{1-q} + (q-1)\zeta(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}} \leqslant \frac{F_{p_k i}(t, x(t))\mathrm{sign}(x_i(t)) + |\omega_i(t)|}{v_{p_k i}} + \zeta\mu^{k+q}[(\eta(\varphi_1 - \varepsilon_1))^{1-q} + (q-1)\zeta(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}} \leqslant \frac{f_{p_k i}(|x(t)|) + |\omega_i(t)|}{v_{p_k i}} +$$

$$\zeta\mu^{k+q}[(\eta(\varphi_1-\varepsilon_1))^{1-q}+(q-1)\zeta(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}\leqslant\frac{1}{v_{p_k i}}[\mu^{k+q}\eta^q\varepsilon_1^q f_{p_k i}(v_p)+\bar{\omega}]+[(\eta(\varphi_1-\varepsilon_1))^{1-q}+(q-1)\zeta(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}}[\frac{f_{p_k i}(v_p)}{v_{p_k i}}+\zeta\mu^{k+q}] \tag{32}$$

根据定理 1 中的证明，可推导出当 $t\in[t_k,t_{k+1})$，$(k\in N_0)$ 时，$z_i(t)\leqslant 0$，则：

$$\frac{|x_i(t)|}{v_{p_k i}}\leqslant\mu^k[(\eta(\varphi_1-\varepsilon_1))^{1-q}+(q-1)\zeta(t-t_0)]^{-\frac{q}{q-1}} \tag{33}$$

由此我们可以很容易地得到系统(30)在 $\tau_\beta>(q-1)\ln\mu$ 的切换信号下是多项式稳定的，定理 2 的证明完毕。

对于具有扰动的非线性切换系统的稳定性，已有的许多研究结果关注的是 Lyapunov 函数的存在性问题，但所涉及的 Lyapunov 函数被施加了许多限制，不容易构造出满足特定系统条件的具体 Lyapunov 函数。Zhu 等[8]和 Xue 等[20]给出的结果不便于广泛的应用。本文所研究的非线性切换系统，构造特定的 Lyapunov 函数也很困难，因此本文采用了一种不同于常用的 Lyapunov 函数和对数收缩平均停留时间法(LCAD)，可以明确地估计系统状态的上界和收敛速度。

3　仿真算例

本节提供了两个仿真算例来说明本文所研究结果的有效性。

例 1　考虑如下由两个非线性子系统组成的连续时间正切换非线性系统：

$$\boldsymbol{f}_1(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}-x_1+2x_2-2\sqrt{x_1^2+2x_2^2}\\3x_1-x_2+\sqrt{2x_1^2+x_2^2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}_2(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}-3x_1+4x_2+\sqrt{x_1^2+2x_2^2}\\x_1-2x_2-2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\begin{bmatrix}0.05|\sin t|\\0.05|\cos t|\end{bmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 表示系统函数，$\boldsymbol{\omega}(t)$ 为外源输入函数。

向量场 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 是满足假设 1 的 q 次协作同构，其中 $q=\dfrac{2}{3}$。外源输入向量 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 是非负的并且有界于 $\bar{\omega}=0.05$。通过计算可知，不存在一个公共向量 $\boldsymbol{v}>0$，使得 $\boldsymbol{f}_1(v)<0$ 和 $\boldsymbol{f}_2(v)<0$，但存在两个不同的向量值 $\boldsymbol{v}_1=(1.04,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{v}_2=(1,1.02)^{\mathrm{T}}$，使得系统函数 $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{v}_1)<0$ 和 $\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{v}_2)<0$。通过计算，可得到 $\xi\approx0.0783$，$\mu=1.06$，$\beta=0.0546$。根据定理 1，系统(1)在 LCAD$\tau_\beta>0.3903$ 的切换信号下是多项式稳定的。系统的切换信号如图 1 所示，选取初始条件 $x(0)=(0.4,1)^{\mathrm{T}}$，可得系统(1)在图 1 切换下的状态轨迹如图 2 所示。

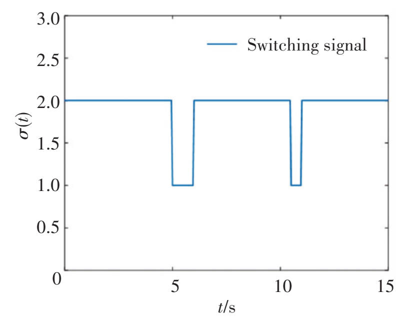

图 1　系统(1)的切换信号

Fig. 1　Switching signal of system (1)

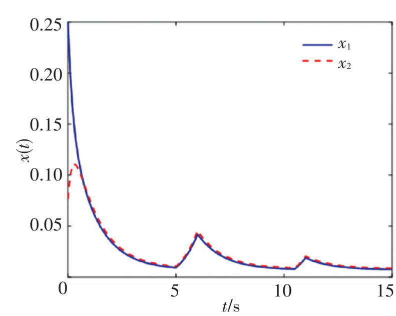

图 2　切换正系统(1)的状态轨迹

Fig. 2　State trajectory of switching the positive system (1)

例 2　考虑如下由 3 个非线性子系统组成的连续时间切换非线性时变系统：

$$F_1(t,x)=\begin{bmatrix}-x_1-0.1\sin tx_2\\0,\sin t\sqrt{2x_1^2+x_2^2}-x_2\end{bmatrix}$$

$$F_2(t,x)=\begin{bmatrix}-2x_1-0.3\sin t\sqrt{x_1^2+x_2^2}\\-2x_2-0.2\cos t\sqrt{x_1^2+x_2^2}\end{bmatrix}$$

$$F_3(t,x)=\begin{bmatrix}-2x_2^2-0.5\sin t\sqrt{x_1^2+x_2^2}\\-x_1^2-0.5\cos t\sqrt[3]{x_1^2+x_2^2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\begin{bmatrix}0.05\sin t\\0.05\cos t\end{bmatrix}$$

其中，F_1,F_2,F_3 为系统(30)的系统函数，$\boldsymbol{\omega}(t)$ 为系统的外源输入函数。

在假设 2 的基础上，选择比较向量值函数：

$$f_1(x)=\begin{bmatrix}-x_1+0.1x_2\\-x_2+0.1\sqrt{2x_1^2+x_2^2}\end{bmatrix}$$

$$f_2(x)=\begin{bmatrix}-2x_1+0.3\sqrt{x_1^2+x_2^2}\\0.2\sqrt{x_1^2+x_2^2}-2x_2\end{bmatrix}$$

$$f_3(x)=\begin{bmatrix}-2x_2^2+0.5\sqrt{x_1^2+x_2^2}\\-x_1^2+0.5\sqrt[3]{x_1^2+x_2^2}\end{bmatrix}$$

很明显,向量$\boldsymbol{f}_1$和$\boldsymbol{f}_2$为$q=\dfrac{2}{3}$次的合作同构,其中$q=\dfrac{2}{3}$。根据简单的推导,可以得到外源输入向量$\boldsymbol{\omega}(t)$是非负的并且有界于$\bar{\omega}=0.05$。由于不存在一个公共向量$\boldsymbol{v}>0$,使得$\boldsymbol{f}_1(v)<0$和$\boldsymbol{f}_2(v)<0$,则本文通过构造向量$\boldsymbol{v}_1=(1.04,1)^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{v}_2=(1,1.02)^{\mathrm{T}}$,使得式(4)成立。设初始条件$x(0)=(1,1)^{\mathrm{T}}$,则根据定理2可得出$\zeta\approx0.1283$,$\mu=1.26$,$\beta=0.0946$,继而可得到切换系统(30)在对数收缩平均停留时间(LCAD)$\tau_\beta>0.6590$的切换信号下是多项式稳定的。系统的切换信号如图3所示,选取初始条件为$x(0)=(0.4,1)^{\mathrm{T}}$,系统(30)在图3切换下的状态轨迹如图4所示。

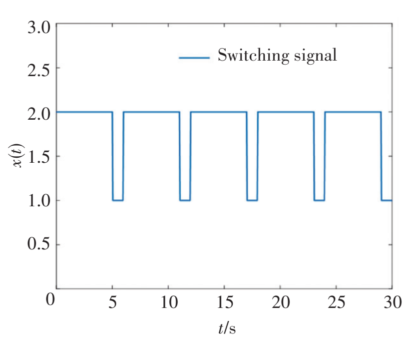

图3　系统(30)的切换信号

Fig. 3　Switching signal of system (30)

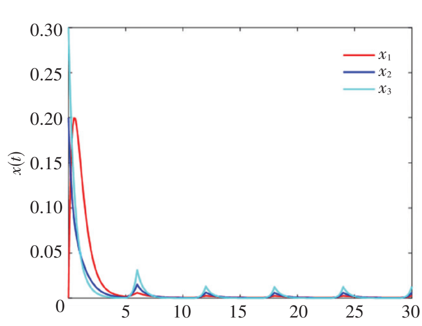

图4　切换正系统(30)的状态轨迹

Fig. 4　State trajectory of switching the positive system (30)

4　结束语

本文研究了具有非负外源输入的切换齐次正非线性系统的多项式稳定性问题。在平均停留时间切换下,利用正系统的解析技巧,建立了系统多项式稳定性的显式判据,而且将结果推广到更一般的切换非线性系统。最后给出的仿真算例和仿真结果,验证了本文方法的有效性。在未来,将在系统中考虑时滞因素的影响,研究不同程度的正切换齐次时滞系统的多项式稳定性。

参考文献

[1] ZOU Y, MENG Z, MENG D. On exponential stability of switched homogeneous positive systems of degree one[J]. Automatica, 2019, 103: 302-309.

[2] 贺彦君,马伟伟,池小波. 网络化非周期采样控制系统的主动时间滞后控制:随机脉冲切换系统方法[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(4):9.

[3] ZHU X, SUN Y, XIE X J. State bounding for nonlinear time-varying systems with delay and disturbance[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(16):8213-8224.

[4] FEYZMA H R, CHA T, JOH M. Exponential stability of homogeneous positive systems of degree one with time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 59(6):1594-1599.

[5] ZHU X, LIU S, SUN Y. Reachable set bounding for discrete-time nonlinear positive systems with time-varying delay and disturbance[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(10): 6205-6215.

[6] DONG J G. On the decay rates of homogeneous positive systems of any degree with time-varying dalays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015,60(1):2983-2988.

[7] ZHAO P, ZHAO Y, SONG X. Stochastic stability of nonlinear positive systems with random switching signals[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2020, 38: 100940.

[8] ZHU X, LIU S. Reachable set estimation for continuous-time impulsive switched nonlinear time-varying systems with delay and disturbance[J]. Applied Mathematics and Computation, 2022, 420: 126910.

[9] ZHU X, LIU S, SUN Y. Finite-time state bounding of homogeneous nonlinear positive systems with disturbance[J]. Journal of the Franklin Institute, 2022, 359(1): 27-37.

[10] SUN Y, TIAN Y. Polynomial stability of positive switching homogeneous systems with different degrees [J]. Applied Mathematics and Computation, 2022, 414: 126699.

[11] ZHANG J, SUN Y. Polynomial stability of positive switched homogeneous systems with time delay[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2023, 47: 101306.

[12] XU Y, DONG J G, LU R, et al. Stability of continuous-time positive switched linear systems: A weak common copositive Lyapunov functions approach[J]. Automatica, 2018, 97: 278-285.

[13] JU Y, SUN Y, MENG F. Stabilization of switched positive system with impulse and marginally stable subsystems: A mode-

dependent dwell time method [J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 383: 125377.

[14] ZHANG J, ZHAO X, CAI X. Absolute exponential L1 - gainanalysis and synthesis of switched nonlinear positive systems with time-varying delay [J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 284: 24-36.

[15] FAN M, LIANG M. Stability of switched positive nonlinear systems with partial unstable subsystems[C]//Proceedings of 2022 41st Chinese Control Conference (CCC). Piscataway, NJ: IEEE, 2022: 1090-1094.

[16] SHEN T, PETERSEN I R. An ultimate state bound for a class of linear systems with delay[J]. Automatica, 2018, 87: 447-449.

[17] TRINH H M. A new approach to state bounding for linear time-varying systems with delay and bounded disturbances [J]. Automatica, 2014, 50(6): 1735-1738.

[18] YANG H, ZHANG Y, HUANG X, et al. Positivity and exponential stability of coupled homogeneous time - delay differential - difference equations of degree one [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2022(2):41.

[19] ZHAO P, KANG Y, NIU B, et al. Input-to-state stability and stabilization for switched nonlinear positive systems[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2023, 47: 101298.

[20] XUE Y, ZHAO P. Input-to-state stability and stabilization of nonlinear impulsive positive systems[J]. Mathematics, 2021, 9 (14): 1663.

[21] CHEN B, NIU Y, LIU H. Input - to - state stabilization of stochastic Markovian jump systems under communication constraints: genetic algorithm - based performance optimization [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 52(10): 10379-10392.