

周进群,胡忠华,孙晓洁. 改进小波阈值算法在信号处理中的研究[J]. 智能计算机与应用, 2025, 15(2): 91-95. DOI: 10.20169/j. issn. 2095-2163. 24062301

改进小波阈值算法在信号处理中的研究

周进群¹, 胡忠华¹, 孙晓洁²

(1 深南电路股份有限公司, 广东 深圳 518117; 2 无锡深南电路有限公司, 江苏 无锡 214028)

摘要: 采用小波阈值方法去噪虽然应用广泛,但传统的硬阈值和软阈值函数仍然存在截断、连续性及恒定误差等问题,导致信号去噪效果不佳。针对阈值函数局限性导致降噪不佳的问题,提出一种增加调节系数的改进小波阈值算法,通过控制系数可以灵活选择阈值函数满足信号去噪需求。仿真与实验测试表明,改进算法有效提高了信号的去噪效果,同时信噪比均方误差均有了明显改善,验证了改进算法的实际去噪效果和与原信号的接近程度,可以满足各种类型数字信号的去噪需求。

关键词: 信号处理; 小波阈值去噪; 阈值函数

中图分类号: TN911.4

文献标志码: A

文章编号: 2095-2163(2025)02-0091-05

Research on improved wavelet threshold algorithm in signal processing

ZHOU Jinqun¹, HU Zhonghua¹, SUN Xiaojie²

(1 Shennan Circuits Co., Ltd., Shenzhen 518117, Guangdong, China;

2 Wuxi Shennan Circuits Co., Ltd., Wuxi 214028, Jiangsu, China)

Abstract: Although the wavelet threshold method is widely used in denoising, the traditional hard threshold and soft threshold functions still have problems such as truncation, continuity and constant error, which leads to poor signal denoising effect. Aiming at the problem of poor noise reduction caused by the limitation of threshold function, an improved wavelet threshold algorithm with an adjustment coefficient is proposed. The threshold function can be flexibly selected to meet the demand of signal denoising by controlling the coefficient. The simulation and experimental results show that the improved algorithm effectively improves the denoising effect of the signal, and the mean square error of the signal-to-noise ratio has been significantly improved, which verifies the actual denoising effect of the improved algorithm and the closeness to the original signal, and can meet the denoising needs of various types of digital signals.

Key words: Signal processing; wavelet threshold denoising; threshold function

0 引言

实际工业生产过程中,数字信号在产生、传输及接收过程中受设备精度、环境等因素干扰^[1],导致获取到的实际信号与理想信号存在较大的偏差,产生较大损耗。因此,需要对采集的信号进行处理,去除噪声干扰,获取纯净信号^[2]。

常见的去噪方法如傅里叶变换、小波去噪,由于傅里叶变换存在时域问题的限制,该局限性使得其只可以对平稳的信号进行去噪^[3],但实际信号常常是非平稳的波动信号。而小波去噪算法综合考虑了时域和频域^[4],因此在实际生产中大都选择小波阈值算法进行信号去噪。

Donoho等^[5]提出的小波硬阈值、软阈值去噪法,作为经典算法对信号去噪有着重要意义。但由于传统硬阈值、软阈值函数自身的限制,在对波动信号去噪时会在阈值处出现截断以及恒定误差等问题,导致去噪效果欠佳。因此,侯云海等^[6]选择基于硬阈值函数进行阈值公式的重新设定来改善平滑性,但该方式仍未解决阈值处不连续的情况;崔莹等^[7]通过添加调节参数实现软硬阈值函数切换,但调节灵活度不高,且随着分解层越多时会出现信号失真问题;杨兆昭等^[8]采用加权平均阈值函数以降低恒定偏差,但受限于分解尺度的小波系数,计算复杂且对存在大方差的噪声过滤效果较差。

针对上述方法中出现的问题,本文提出一种改

作者简介: 周进群(1973—),男,硕士,高级工程师,主要研究方向:制造业自动化、数字化、智能化。

通信作者: 孙晓洁(1996—),女,硕士,工程师,主要研究方向:过程控制,信号处理。Email: 18561180732@163.com。

收稿日期: 2024-06-23

哈尔滨工业大学主办 ◆ 系统开发与应用

进阈值算法。该方法基于指数函数进行平滑处理,同时通过改变系数以灵活改变阈值函数,保留原阈值函数优点同时优化阈值函数误差,以满足各种类型的去噪需求。

1 小波去噪原理分析

小波变换将原始含噪信号进行信号系数分解,分解为小波域较为集中的所需信号和遍布整个小波域的噪声信号^[9],即小波分解可以通过小波系数区分信号和噪声,一般分解后信号的小波系数幅值比噪声的系数幅值大。小波阈值去噪通过选择合适的阈值,将系数大的信号保留,消除小系数的噪声^[10],保留这部分系数后进行小波逆变换得到去噪信号。

线性含噪的一维信号可以表示如下:

$$f(x) = A(x) + B(x)$$
 (1)

其中, $f(x)$ 为含噪信号; $A(x)$ 为原始信号; $B(x)$ 为噪声信号。

将含噪信号函数 $f(x)$ 进行离散处理,可以展开成不同尺度、不同位置的尺度函数和小波函数的线性组合^[11],如下式:

$$f(x) = A(x) + B(x) = \sum_k c_0(k) \phi_{0,k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_k d_j(k) \psi_{j,k}(x)$$
 (2)

进而

$$c_o(k) = \int f(x) \phi_{0,k}(x) dx$$
$$d_j(k) = \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx$$
 (3)

式中: $c_o(k)$ 和 $d_j(k)$ 为近似系数与细节系数^[12]。

实现过程为:先将尺度分解^[13],然后基于分解后的信号系数进行阈值去噪,最后基于去噪处理的信号进行恢复,得到较为纯净稳定的去噪信号,整体去噪过程如图 1 所示。

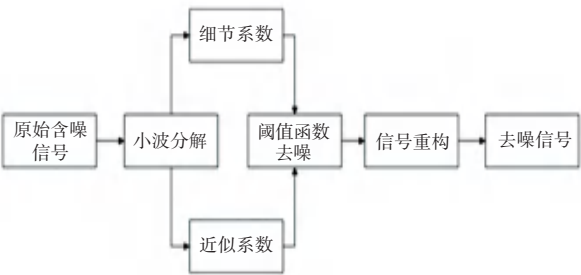


图 1 小波去噪处理流程图

Fig. 1 Flow chart of wavelet denoising processing

由图 1 可见,去噪处理中较为重要的是关于阈值函数的选择,传统阈值函数一般分为硬阈值函数和软阈值函数^[14]。

硬阈值去噪函数通过把分解的小波系数以阈值进行划分,其中噪音信号多处于较小系数的部分,因此直接将低于阈值的部分置 0,而高于阈值的部分则保持不变。

硬阈值函数:

$$d(x) = \begin{cases} x, & |x| \geq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases}$$
 (4)

软阈值函数:

$$d(x) = \begin{cases} \text{sign}(x)(|x| - \lambda), & |x| \geq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases}$$
 (5)

上式传统软、硬阈值函数如图 2 所示:

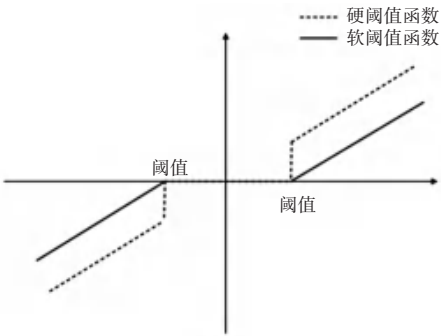


图 2 传统阈值函数图

Fig. 2 Plot of the traditional threshold function

由于在阈值处截断,硬阈值函数不连续,导致信号在重构之后信号的连贯性不能得到保证,出现伪吉布斯现象^[15]。

软阈值函数相较于硬阈值函数在阈值处对系数进行了处理。虽然函数进行平滑处理,但也导致信号在重构之后存在恒定偏差^[16]。

2 改进阈值函数

针对传统硬、软阈值去噪函数及文献[6-8]改进函数存在连续性差、恒定偏差等问题,本文提出一种改进小波阈值去噪函数如下:

$$d(x) = \begin{cases} \text{sign}(x) \left\{ |x| + \left(\frac{\alpha}{e^{\beta(|x|-\lambda)^2}} - 1 \right) \lambda \right\}, & |x| \geq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases}$$
 (6)

式中: x 是小波分解后的系数, λ 是阈值, $\text{sign}(x)$ 是符号函数, α 是修正系数, β 是调整因子。通过控制 α 和 β 可以实现硬阈值、软阈值函数的灵活切换。

本文提出的改进阈值函数理论推导证明如下:

1) 与硬阈值函数的逼近性

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \left(\frac{\alpha}{e^{\beta(|x|-\lambda)^2} - 1} \right) \lambda}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{e^{\beta(|x|-\lambda)^2} - 1} \right) \lambda}{x} \right) = 1 \quad (7)$$

所以, $d(x)$ 以 $d(x) = x$ 为渐近线。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |d(x) - x| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| x + \left(\frac{\alpha}{e^{\beta(|x|-\lambda)^2} - 1} \right) \lambda - x \right| =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{\alpha}{e^{\beta(|x|-\lambda)^2} - 1} \right) \lambda \right| = 0 \quad (8)$$

因此,在 $|x| > \lambda$ 时 $d(x)$ 无限逼近 x , 说明改进函数使得原始信号得到更好的保留。

2) 函数的高阶可微性

改进函数的左导数:

$$\lim_{x \rightarrow \lambda^-} \frac{d(x) - d(\lambda)}{x - \lambda} = \lim_{x \rightarrow \lambda^-} \frac{\left(\frac{\alpha}{e^{\beta(|x|-\lambda)^2} - 1} - \alpha \right) \lambda}{x - \lambda} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \lambda^-} \frac{(1 - e^{\beta(|x|-\lambda)^2}) \alpha \lambda}{(x - \lambda) e^{\beta(|x|-\lambda)^2}} = 0 \quad (9)$$

同理右导数:

$$\lim_{x \rightarrow \lambda^+} \frac{d(x) - d(\lambda)}{x - \lambda} = 0 \quad (10)$$

因此,在 $(\lambda, +\infty)$ 上,

$$\frac{dd(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x + \Delta x) - d(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + \left(\frac{\alpha}{e^{\beta(|x+\Delta x|-\lambda)^2} - 1} - \frac{\alpha}{e^{\beta(|x|-\lambda)^2} - 1} \right) \lambda}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{(e^{\beta(|x|-\lambda)^2} - e^{\beta(|x+\Delta x|-\lambda)^2}) \alpha \lambda}{e^{\beta(|x+\Delta x|-\lambda)^2} e^{\beta(|x|-\lambda)^2} \Delta x} \right) =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{(e^{\beta|x|} - e^{\beta|x+\Delta x|}) \alpha \lambda}{e^{\beta(|x+\Delta x|+|x|)} \Delta x} \right) \quad (11)$$

通过式(9)~(11)的推导验证, $d(x)$ 在整个小波域一阶可导, $\frac{dd(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{(e^{\beta|x|} - e^{\beta|x+\Delta x|}) \alpha \lambda}{e^{\beta(|x+\Delta x|+|x|)} \Delta x} \right)$ 在 $(\lambda, +\infty)$ 上为连续函数。

综上所述,改进算法有效解决了进行信号重构时出现截断以及恒定偏差问题。

3 实验与仿真分析

由原始信号随机产生的信号数据分析所得,利

用传统阈值去噪算法、文献[6-8]和本文提出的改进阈值去噪算法,分别对原始信号进行仿真试验测试,步骤如下:

1) 尺度分解

本文在进行尺度分解的过程确定:对信号 Signal 使用小波“db4”进行了3层分解^[17],分解如图3所示。

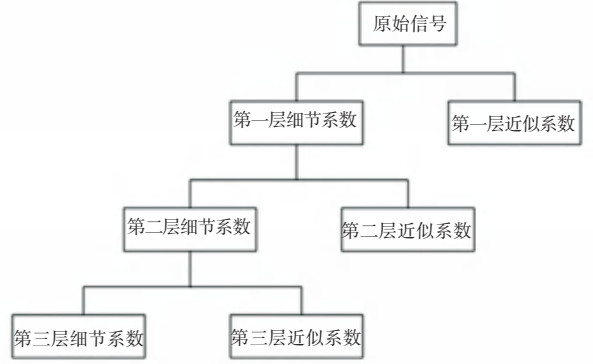


图3 三层信号分解图

Fig. 3 Three-layer signal decomposition diagram

过程中分解系数将存放在数组 c , 包括低频系数 CA_3 和3层高频系数 CD_1 、 CD_2 、 CD_3 , 其他各层分解后的长度将存放在数组 l 。

其中,低频系数 CA_3 即近似系数,高频系数 CD_i 为细节系数。

2) 阈值去噪

使用 sqtwolog 计算各层的阈值: sqtwolog 规则是设置阈值 λ 为 $\sqrt{2 \times \log(\text{length}(N))}$, 其中 N 为信号长度^[18]。

各层分别基于式(5)和式(6)的软阈值函数进行实验,使用小波“db4”进行各层系数的分解如图4所示。

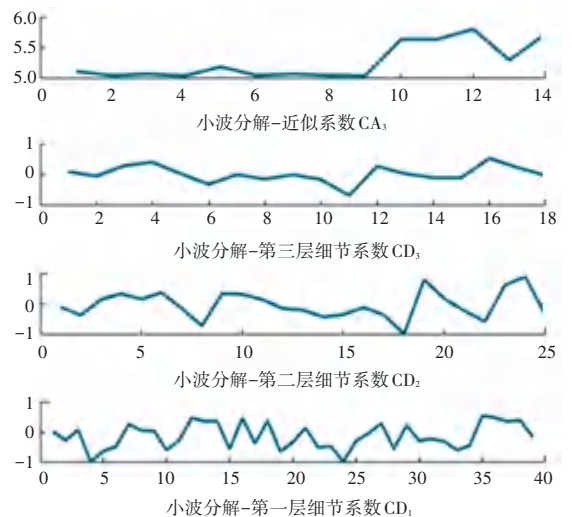


图4 分解各层系数图

Fig. 4 Decompose the coefficient map of each layer

3)信号重构

逆变换重构后获得所需信号,通过 Matlab 基于原始信号进行传统硬阈值、软阈值、文献[6]改进硬阈值、文献[7]改进软阈值、文献[8]改进软阈值及本文改进软阈值去噪函数的仿真实验,图 5~11 分别验证了各去噪函数对同一信号的去噪滤波效果。

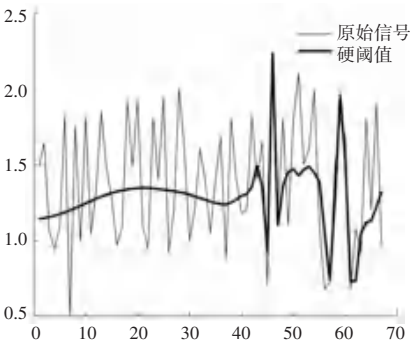


图 5 原始信号与传统硬阈值去噪图

Fig. 5 Original signal with conventional hard threshold denoised map

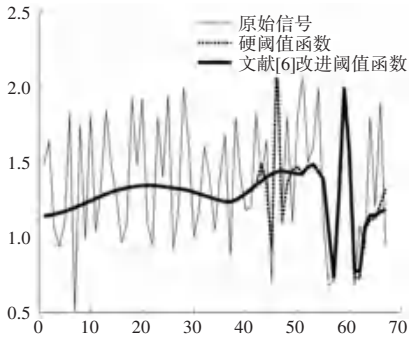


图 6 原始信号与传统硬阈值及文献[6]改进硬阈值去噪对比图

Fig. 6 Comparison of original signal, traditional hard threshold and improved hard threshold denoising in reference

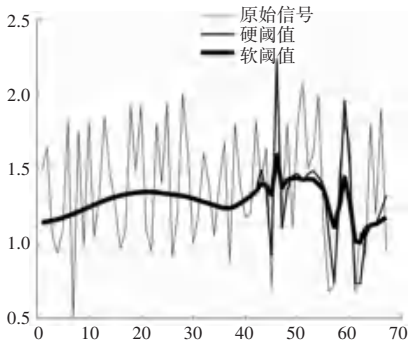


图 7 原始信号与传统硬阈值及软阈值去噪对比图

Fig. 7 Comparison of original signal and traditional hard threshold and soft threshold denoising

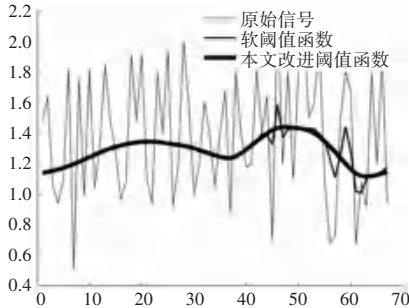


图 8 原始信号与传统软阈值及本文改进软阈值去噪对比图

Fig. 8 Comparison of the original signal and the traditional soft threshold and the improved soft threshold denoising in this paper

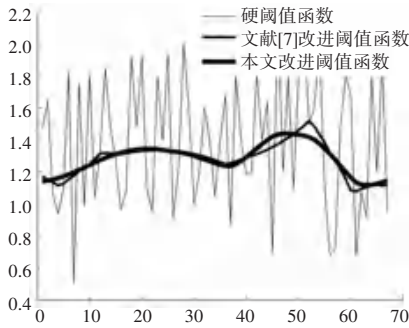


图 9 原始信号与文献[7]改进软阈值及本文改进软阈值去噪对比图

Fig. 9 Comparison of the original signal and the improved soft threshold in reference [7] and the improved soft threshold denoising in this paper

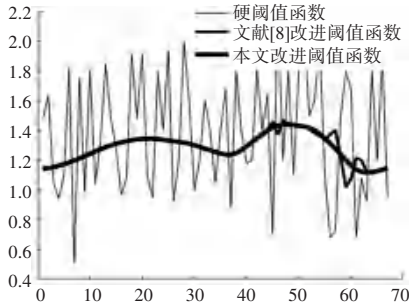


图 10 原始信号与文献[8]改进软阈值及本文改进软阈值去噪对比图

Fig. 10 Comparison of the original signal and the improved soft threshold in reference [8] and the improved soft threshold denoising in this paper

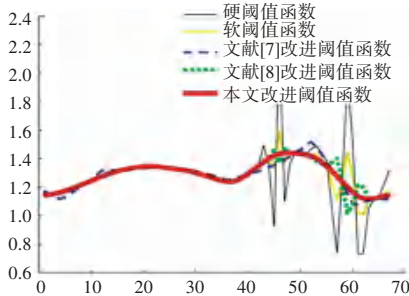


图 11 原始信号与各算法及本文改进软阈值去噪效果图

Fig. 11 Original signal and each algorithm and the effect of the improved soft threshold denoising in this paper

通过仿真结果可得,传统硬阈值、软阈值函数、文献[6-8]的改进函数,虽然对干扰噪声的消除均有改善,但仍然可以看出本文提出的改进阈值函数去噪效果更优。

最后,为了进一步验证改进算法的性能,利用能够反映实际去噪效果和与原信号的程度接近的信噪比(SNR)和均方误差(MSE)进行计算^[19],其定义表达式如下:

$$SNR = 10 \times \log_{10} \left(\frac{\sum_{i=1}^N y(i)^2}{\sum_{i=1}^N (y(i) - \hat{y}(i))^2} \right) \quad (12)$$

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y(i) - \hat{y}(i))^2 \quad (13)$$

其中,在对含噪信号处理重构后,信噪比 SNR 越大,证明对信号的恢复性越好;而均方误差 MSE 越大,则表明降噪效果更好^[20]。通过传统硬、软阈值函数、文献[6-8]改进函数及本文改进函数去噪的 SNR 和 RMSE 的计算数据见表 1。

表 1 去噪效果对比

Table 1 Comparison of denoising effect

	信噪比 SNR	均方误差 RMSE
传统硬阈值去噪	12.627	0.425
文献[6]改进硬阈值去噪	12.994	0.408
传统软阈值去噪	19.317	0.393
文献[7]改进软阈值去噪	21.001	0.361
文献[8]改进软阈值去噪	21.552	0.352
本文改进软阈值去噪	23.201	0.315

从图 11 原始信号与各算法及本文改进软阈值去噪效果图对比可以看出,本文提出的改进算法对信号的消噪处理效果更好。而对比表 1 的信噪比和均方误差可知,改进算法信噪比更高,均方误差更小。因此,可以明显看出本文所提出的改进阈值去噪算法效果更优。

4 结束语

综合传统阈值函数的阈值处截断问题以及恒定误差的缺点结合算法稳定性、适用范围和去噪效果等部分的考虑,本文对小波阈值去噪函数进行改进,提出了一种新的小波阈值去噪函数,改进算法克服了传统阈值函数在阈值处存在截断以及恒定误差等问题。

对比于传统软、硬阈值函数,本文提出的采用一种增加调节系数的新软阈值函数,能够通过控制系

数灵活选择阈值函数。通过仿真与实验测试表明,信噪比与均方误差均有了明显改善,验证了改进算法有效提高了信号的去噪效果。

参考文献

[1] 陆苗霞. 小波变换在信号去噪方面的仿真研究[J]. 科技创新与应用, 2022, 12(5): 48-50.

[2] 田奥升, 张晔, 马超, 等. 基于小波软阈值滤波的含噪故障诊断方法[J]. 智能计算机与应用, 2023, 13(9): 1-4.

[3] 陈龙, 史文库, 陈志勇, 等. 基于小波-VMD 联合降噪的传动系扭振信号分析[J]. 振动、测试与诊断, 2022, 42(4): 703-709.

[4] 王春华, 王方超. 基于改进阈值函数的 SAR 图像小波去噪方法[J]. 微电子学与计算机, 2022, 39(5): 39-44.

[5] DONOHO D L, JOHNSTONE I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81(12): 425-455.

[6] 侯云海, 任钰. 一种改进的小波阈值去噪算法[J]. 长春工业大学学报, 2023, 44(4): 345-352.

[7] 崔莹, 赵磊, 李恒, 等. 基于小波去噪与改进 Canny 算法的带钢表面缺陷检测[J]. 现代电子技术, 2024, 47(4): 148-152.

[8] 杨兆昭, 张峰川, 张鑫鹏. 基于改进小波阈值函数的仪表图像去噪方法研究[J]. 自动化与仪表, 2023, 38(6): 95-99.

[9] YAN Z, XU X, WANG Y, et al. Application of ultrasonic doppler technology based on wavelet threshold denoising algorithm in fetal heart rate and central nervous system malformation detection[J]. World Neurosurgery, 2021(149): 380-387.

[10] 蔡帮贵, 朱雨男, 王彪. EEMD 与改进小波阈值结合应用于心电信号去噪研究[J]. 现代电子技术, 2023, 46(12): 137-140.

[11] 陈潇逸, 滕奇志, 何海波, 等. 基于图像矫正与小波变换融合的岩心图像拼接算法[J]. 智能计算机与应用, 2024, 14(3): 21-27.

[12] 李志农, 朱明, 褚福磊, 等. 基于经验小波变换的机械故障诊断方法研究[J]. 仪器仪表学报, 2014, 35(11): 2423-2432.

[13] ONUFRIENKO D M, TARANENKO Y. Investigation of the influence of adaptive noise on the efficiency of discrete thresholdful wavelet filtration of modulated signals[J]. Computer Science and Applied Mathematics, 2022, 1(10): 22413-22417.

[14] GE J, NIU T, XU D, et al. A rolling bearing fault diagnosis method based on EEMD-WSST signal reconstruction and multi-scale entropy[J]. Entropy, 2020, 22(3): 290.

[15] GUO J, SI Z, XIANG J. A compound fault diagnosis method of rolling bearing based on wavelet scattering transform and improved soft threshold denoising algorithm[J]. Measurement, 2022, 196(11): 111276-111289.

[16] 李林会, 李琳. 动态定量称量包装系统滤波算法[J]. 包装工程, 2018, 39(3): 201-205.

[17] 陈中祥, 熊莹霞. 基于 MATLAB/GUI 的 FIR 和 IIR 数字滤波器的设计实现[J]. 智能计算机与应用, 2022, 12(1): 80-83.

[18] COLOMINAS M A, SCHLOTTHAUER G, TORRES M E. Improved complete ensemble EMD: A suitable tool for biomedical signal processing[J]. Biomedical Signal Processing & Control, 2014, 14(11): 19-29.

[19] 李艳波, 刘雨, 苏宝库. 改进的小波阈值滤波算法在陀螺仪漂移伺服法测试中的应用[J]. 控制与决策, 2010, 25(5): 681-685.

[20] 彭荣杰, 黎龙珍. 基于改进离散小波变化的数字水印技术[J]. 智能计算机与应用, 2023, 13(7): 15-18.